SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von k-Formen mit Norm gleich 1. Sei β eine weitere k-Form, so daß $(\beta_\nu, \varphi) \longrightarrow (\beta, \varphi)$ für $\nu \to \infty$ und für alle k-Formen φ. Zeigen Sie $\beta_\nu \longrightarrow \beta$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\|\beta\| = 1$. Betrachten Sie dazu (β_ν, β_μ).

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Folgeren Sie direkt aus dem Zerlegungssatz von Hodge, daß

(a1) $\Omega^k(M) = d\delta\Omega^k(M) \oplus \delta d\Omega^k(M) \oplus \mathcal{H}^k$

(a2) $\Omega^k(M) = d\Omega^{k-1}(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}(M) \oplus \mathcal{H}^k$

(a3) $Z^k(M) = B^k(M) \oplus \mathcal{H}^k$

orthogonale Zerlegungen sind. Folgeren Sie aus (a3) die Isomorphie der Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^k(M) & \longrightarrow & H^k_{\mathrm{dR}}(M) \\ \omega & \longmapsto & [\omega] \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, daß die Projektion H auf den harmonischen Anteil von $\Omega^k(M)$ und $P = \mathbb{1} - H$ beschränkt und zueinander orthogonal sind.

(c) Der **Greensche Operator**

$$G := \left(\Delta\,|_{(\mathcal{H}^k)^\perp}\right)^{-1} \circ P\colon\ \Omega^k(M) \longrightarrow (\mathcal{H}^k)^\perp$$

ist wohldefiniert, beschränkt und symmetrisch, bildet beschränkte Folgen in Folgen mit Cauchy-Teilfolgen ab und kommutiert mit d, δ, Δ und $*$. Jede deRham-Kohomologieklasse $[\omega]$ ist eindeutig durch

$$\omega = d\delta G\omega + H\omega$$

gegeben.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Laplace-Operator (für 0- und 1-Formen) für eine beliebige Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Seien Ω eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$. Gelte $\int_\Omega f\varphi dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, daß $f = 0$ fast überall.
Gilt eine analoge Aussage für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$?

Bonusaufgabe. Definieren und berechnen Sie die Symbole des äußeren Ableitungs- und des Koableitungsoperators. Sind diese elliptisch?

Abgabe: Donnerstag 24.05.12
14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317