WS 2010/11 Dr. Kai Zehmisch

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 10

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3 \times S^1$ die 2-Form

$$\omega = dx \wedge dy + dr \wedge d\theta \ ,$$

wobei $\mathbb{R}^3$ die kartesischen Koordinaten (x, y, r) und $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Winkelkoordinate θ habe. In den folgenden Aufgaben werden wir die Dynamik des Reebschen Flußes auf $S^2 \times S^1$ (mit $S^2 = \{x^2 + y^2 + r^2 = 1\}$) untersuchen.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) ω ist eine **symplektische Form**, d.h. $d\omega = 0$ und $\omega^2 = \omega \wedge \omega$ verschwindet in keinem Punkt.

(b) $Y = \frac{1}{2}(x\partial_x + y\partial_y) + r\partial_r$ ist ein **Liouvillesches Vektorfeld** (d.h. $L_Y\omega = \omega$), welches transversal zu $S^2 \times S^1$ ist.

(c) $\alpha = (i_Y\omega)\,|_{T(S^2\times S^1)}$ ist eine **Kontaktform** auf $S^2 \times S^1$, d.h. die 3-Form $\alpha \wedge d\alpha$ verschwindet in keinem Punkt von $S^2 \times S^1$.

(d) $X = \frac{2}{1+r^2}(-y\partial_x + x\partial_y + r\partial_\theta)$ ist das **Reebsche Vektorfled** zur Kontaktform α, d.h. die eindeutige Lösung X von $i_X\alpha = 1$ und $i_X d\alpha = 0$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Integralkurven des Reebschen Vektorfeldes X aus Aufgabe 1, d.h. alle Lösungen $c = c(t)$ der Gleichung $X(c) = \dot{c}$ mit Anfangswerten $c(0) = (x_0, y_0, r_0, \theta_0)$. Für welche Anfangswerte sind die Integralkurven **periodisch**, d.h. wann gibt es ein $T > 0$ mit $c(0) = c(T)$? Bestimmen Sie die Perioden T in Abhängigkeit von r_0. Was ist die kleinste Periode? Kann $T = 2\pi$ sein? Welche Homotopieklassen repräsentieren die periodischen Lösungen?
Hinweis: Fassen Sie die Koordinaten (x, y) als eine komplexe Koordinate $z = x + iy$ auf.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{D}$ und den abgeschlossenen Ball vom Radius 1 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit D^3. Für eine glatte Abbildung $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (D^3 \times S^1, S^2 \times \{\theta\})$ ist die **symplektische Energie** definiert durch

$$E(u) = \int_{\mathbb{D}} u^*\omega \ .$$

(a) Berechnen Sie die symplektische Energie für die Abbildungen $u_r^\theta(z) = (\sqrt{1-r^2} \cdot z; r, \theta)$, $z \in \mathbb{D}$, für alle Parameter $(r, \theta) \in [-1, 1] \times S^1$.

(b) Sei $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (D^3 \times S^1, S^2 \times \{\theta\})$ eine glatte Einbettung mit positiver symplektischer Energie. Zeigen Sie, daß $E(u) \leq \pi$.

Hinweis: Die eingebettete Randkurve $v(\partial\mathbb{D})$ zerlegt $S^2 = S^2 \times \{\theta\}$ in zwei Scheiben D und E, so daß $v(\partial\mathbb{D})$ orientierter Rand von D ist. Mit dieser Konvention läßt sich der Stokessche Satz bzgl. der exakten Form $\omega = di_Y\omega$ anwenden. Wie hängt $\omega|_{TS^2}$ mit der Flächenform $\sigma = xdy \wedge dr + ydr \wedge dx + rdx \wedge dy$ auf S^2 zusammen?

Aufgabe 4. Zu kleinem $\varepsilon > 0$ sei eine Einbettung des 2-Torus T^2 in den $\mathbb{R}^3$ durch Rotation eines ε-Kreises mit Mittelpunkt $(1, 0)$ in der xr-Ebene um die r-Achse gegeben. Wir werden das Bild in $\mathbb{R}^3 \times S^1$ einfach mit $T^2 \times S^1$ bezeichnen. Finden Sie ein Liouvillesches Vektorfeld auf $\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{x^2 + y^2 = 0\}\big) \times S^1$, welches transversal zu $T^2 \times S^1$ ist.
Man kann zeigen, daß es ein solches Liouvillesches Vektorfeld global nicht geben kann!

Abgabe: Mittwoch 19.01.11
Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI