WS 2010/11 Dr. Kai Zehmisch

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei ω eine antisymmetrische Bilinearform auf dem reellen $2n$-dimensionalen Vektorraum V, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) ω ist nicht entartet, d.h. für alle nicht verschwindenden Vektoren $u \in V$ gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\omega(u, v) \neq 0$.

(b) Die Abbildung $I : V \to V^*$, die jedem Vektor v die Linearform $I(v) = \omega(v, .)$ zuordnet, ist ein Vektorraumisomorphismus. Dabei bezeichnen wir mit V^* den Dualraum von V.

(c) Die n-te äußere Potenz $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$, aufgefaßt als $2n$-Multilinearform, verschwindet nicht.

Aufgabe 2. Sei (V, ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum und E ein linearer Unterraum. Das symplektische orthogonale Komplement E^ω sei die Menge aller derjenigen Vektoren $v \in V$, so daß die Linearform $\omega(v, .)$ auf dem Unterraum E verschwindet. Zeigen Sie:

(a) E^ω ist ebenfalls ein linearer Unterraum.

(b) Es gilt die Dimensionsformel: $\dim E + \dim E^\omega = 2n$.

(c) Mit $F = E^\omega$ gilt $F^\omega = E$.

Aufgabe 3. Sei (V, ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum und E ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

(a) E (resp. E^ω) ist isotrop genau dann, wenn E^ω (resp. E) koisotrop ist.

(b) Jede Hyperebene ist koisotrop.

(c) E ist isotrop genau dann, wenn $\omega_{|E}$ verschwindet, wobei $\omega_{|E}$ die Bilinearform ω eingeschränkt auf E bezeichne. Insbesondere ist E genau dann Lagrangesch, wenn $\dim E = n$ und $\omega_{|E} = 0$.

(d) E ist symplektisch genau dann, wenn E^ω symplektisch ist. Ferner ist dies äquivalent zu $E \oplus E^\omega = V$.

(e) E ist symplektisch genau dann, wenn die Bilinearform $\omega_{|E}$ nicht entartet ist.

Aufgabe 4. Sei (V, ω) ein $2n$-dimensionaler symplektischer Vektorraum und A eine lineare Abbildung $V \to V$. Zeigen Sie, daß A ein symplektischer Isomorphismus auf (V, ω) genau dann ist, wenn der Graph $\Gamma_A = \big\{(v, Av) \;\big|\; v \in V\big\}$ ein Lagrangescher Unterraum des symplektischen Vektorraumes $(V \times V, \Omega)$ mit $\Omega = (-\omega) \oplus \omega$ ist.

Bonusaufgabe. Sei E ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, daß

$$\Omega\big((u, \alpha), (v, \beta)\big) = \beta(u) - \alpha(v)$$

eine symplektische Form auf $E \oplus E^*$ definiert. Ist ferner E ein Lagrangescher Unteraum von (V, ω), so sind (V, ω) und $(E \oplus E^*, \Omega)$ symplektomorph.

Abgabe: Montag 25.10.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI