WS 2010/11 Dr. Kai Zehmisch

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei Q eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die **Liouvillesche From** λ auf T^*Q sei wie folgt definiert: Der Wert der 1-Form λ an einem Fußpunkt $u \in T^*Q$ sei $\lambda_u = u \circ T\pi$, wobei $T\pi$ das Differential der kanonischen Projektion $\pi : T^*Q \to Q$ bezeichne.

(a) Zeigen Sie, daß die Liouvillesche From λ eindeutig durch folgende Bedingung charakterisiert ist: Für jede 1-Form τ auf Q (also jeden Schnitt τ im Bündel $T^*Q \to Q$) gilt: $\tau = \tau^*\lambda$.

(b) Führt man lokale Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n)$ auf Q und duale Koordinaten $(p_1, \ldots, p_n)$ auf den Fasern von T^*Q ein, so erhält man: $\lambda = \sum_{j=1}^n p_j dq_j$.

(c) Die kanonische 2-Form $\omega = d\lambda$ ist eine symplektische Form auf T^*Q.

Aufgabe 2. Sei X_t eine glatte Familie von Vektorfeldern und ω_t eine glatte Familie von Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit. Der lokale Fluß zu X_t sei mit φ^t bezeichnet. Beweisen Sie die folgende Formel:

$$\tfrac{d}{dt}\big((\varphi^t)^*\omega_t\big) = (\varphi^t)^*\big(L_{X_t}\omega_t + \tfrac{d}{dt}\omega_t\big) \ .$$

Aufgabe 3. Sei ω_t eine glatte Familie von symplektischen Formen und λ eine gegebene 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß durch $i_{X_t}\omega_t = \lambda$ eine glatte Familie X_t von Vektorfeldern definiert ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgenden auf Moser zurückgehenden Satz: Sei M eine geschlossene, zusammenhängende und orientierte Mannigfaltigkeit. Seien α und β zwei Volumenformen mit

$$\int_M \alpha = \int_M \beta \ .$$

Dann gibt es einen Diffeomorphismus φ von M mit $\varphi^*\beta = \alpha$.

Bonusaufgabe. Sei X ein **symplektisches Vektorfeld** auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω), d.h. $i_X\omega$ ist geschlossen. Zeigen Sie, daß der Fluß zu X symplektisch ist.

Abgabe: Mittwoch 10.11.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI