WS 2010/11 Dr. Kai Zehmisch

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei S eine Mannigfaltigkeit endlicher Dimension, X ein **vollständig integrables** Vektorfeld auf S (d.h. der Fluß $\varphi^t = \varphi^t_X$ zu X existiert für alle Zeiten) und m ein endliches Maß auf S, welches unter dem Fluß φ^t invariant ist. Welches Maß hat das Komplement aller Rückkehrpunkte von φ^t? Was kann man noch über Iterationen eines Diffeomorphismuses φ von S aussagen, wenn φ das Maß m invariant läßt?

Aufgabe 2.

(a) Sei X_H irgendein Hamiltonsches Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit Energiehyperfläche

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\|x\|^2 = R \right\} , \qquad R > 0 .$$

Zeigen Sie, daß alle Lösungen von X_H auf S periodisch sind.

(b) Seien F und H Hamiltonsche Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit, so daß F und H die Energiehyperfläche S gemeinsam haben. Wie kann man aus der Kenntnis des Hamiltonschen Flußes $\varphi^t_{X_H}$ den Hamiltonschen Fluß $\psi^s_{X_F}$ berechnen?

Aufgabe 3. Sei D ein Gebiet in $\mathbb{R}^{2n}$ mit glattem Rand $S = \partial D$. In den Teilaufgaben (c) bis (e) wollen wir zusätzlich annehmen, daß S kompakt und streng konvex ist.

(a) Zeigen Sie, daß S genau dann kompakt und konvex ist, wenn das Gebiet D beschränkt und konvex ist.

(b) Zeigen Sie, daß der Rand des in Richtung eines konstanten Vektorfeldes v auf $\mathbb{R}^{2n}$ verschobenen Gebietes D genau dann geschlossene Charakteristiken besitzt, wenn S geschlossene Charakteristiken hat.

(c) Zeigen Sie, daß jeder Strahl, der von einem Punkt aus D ausgeht, den Rand S (genau in einem Punkt) transversal schneidet.

(d) Zeigen Sie, daß die in (12) (siehe Vorlesung) definierte Funktion homogen vom Grad 1 und stetig ist.

(e) Beweisen Sie die in (13) bis (16) stehenden Formeln (siehe Vorlesung) inklusive der behaupteten Existenz der verwendeten Riemannschen Metrik.

b.w.

Aufgabe 4. Sei $\varphi : Q \to Q$ ein Diffeomorphismus auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit Q. Zeigen Sie, daß dann φ in kanonischer Weise einen Symplektomorphismus auf dem Kotangentialbündel T^*Q induziert. Was sind die Bilder des Nullschnittes und der Fasern von T^*Q?

Bonusaufgabe. Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^m$ und $f \in L^2(\Omega)$ eine quadratintegrable Funktion. Sei weiterhin $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, daß dann f fast überall verschwindet.

Abgabe: Mittwoch 17.11.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI