Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Im folgenden seien für eine Hamiltonsche Funktion H auf $\mathbb{R}^{2n}$ und für geschlossene C^1-Kurven $x = x(t)$ in $\mathbb{R}^{2n}$ (also 2π-periodische Abbildungen $x \in C^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{2n}$) die Funktionale

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle Jx, \dot{x}\rangle dt \;, \qquad I(x) = \int_0^{2\pi} H(x) dt$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie die **kritischen Punkte** des Funktionals $\Phi(x) = \mathcal{A}(x) - I(x)$, d.h. alle Punkte $x_0 \in C^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, so daß

$$d\Phi(x_0)\{\xi\} = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \Phi(x_0 + s\xi) = 0$$

für alle $\xi \in C^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ gilt. Welche Differenzierbarkeitseigenschaften hat x_0?

(b) Sei nun H eine nichtkonstante nichtnegative Hamiltonsche Funktion, welche wir **nichtnegativ homogen vom Grad** 2 annehmen wollen, d.h. es gelte $H(ax) = a^2 H(x)$ für alle reellen $a \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Zeigen Sie, daß das Funktional I weder von unten noch von oben beschränkt ist, wobei die Nebenbedingung $\mathcal{A} = 1$ stets erfüllt sei.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Legendresche Transformierte G von H den angegebenen Bedingungen aus Schritt 2' (siehe Vorlesung, Beweis von Hauptsatz 1) genügt.

Aufgabe 3. Es sei daran erinnert, daß die Fourierreihe

$$z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k e^{ikt} \;, \quad t \in (0, 2\pi) \;,$$

einer quadratintegrierbaren Funktion z, also $z \in L^2\big((0, 2\pi)\big)$, durch

$$z_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z(t) e^{-ikt} dt$$

gegeben ist, und diese Fourierreihe in $L^2\big((0, 2\pi)\big)$ gegen z konvergiert. (Nach dem Satz von Carleson (1966) konvergiert die Fourierreihe von z sogar fast überall gegen z.) Ferner gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |z(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |z_k|^2$$

für alle $z \in L^2\big((0, 2\pi)\big)$, und nach dem Satz von Fischer-Riesz definiert jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum |z_k|^2 < \infty$ ein Element $z \in L^2\big((0, 2\pi)\big)$ vermöge $z(t) = \sum z_k e^{ikt}$.

Sei nun $H^s(S^1)$, $s \geq 0$, die Menge aller Fourierreihen

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k e^{ikt} , \quad z_k \in \mathbb{C} , \quad \text{für die gilt:} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s}|z_k|^2 < \infty .$$

Zeigen Sie:

(a) Jede solche H^s-Fourierreihe konvergiert in L^2. Es gilt sogar $H^s \subset H^t$, falls $0 \leq t \leq s$ ist.

(b) $H^s(S^1)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle z, w\rangle_s = z_0\bar{w}_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} z_k \bar{w}_k$$

ist ein Hilbertraum mit zugehöriger Norm $\|z\|_s^2 = \langle z, z\rangle_s$.

(c) Die glatten Funktionen $S^1 \to \mathbb{C}$ liegen dicht in $H^s(S^1)$.

(d) Ist $s > 1/2$, so ist $H^s(S^1)$ eine Teilmenge von $C^0(S^1)$. Ferner gibt es eine positive Konstante $c = c(s)$, so daß für alle $z \in H^s(S^1)$ gilt:

$$\sup_{t\in(0,2\pi)} |z(t)| \leq c\|z\|_s .$$

(Man beachte, daß die Fourierreihe einer stetigen 2π-periodischen Funktion nichteinmal punktweise zu konvergieren braucht! (DuBois-Reymond, 1876))

(e) Ist sogar $s > 1/2 + r$ für eine natürliche Zahl r, so ist $H^s(S^1)$ eine Teilmenge von $C^r(S^1)$. Ferner gibt es eine positive Konstante $c = c(s)$, so daß für alle $z \in H^s(S^1)$ gilt:

$$\max_{j=1,\ldots,r} \left(\sup_{t\in(0,2\pi)} |z^{(j)}(t)| \right) \leq c\|z\|_s .$$

(f) Man stelle das Resultat in (e) in Beziehung zu dem bekannten Satz, daß die Fourierreihen stetig differenzierbarer 2π-periodischer Funktionen z gleichmäßig gegen z konvergieren.

Aufgabe 4. Eine stetige 2π-periodische Funktion z heißt **absolutstetig**, wenn es ein w in $L^1\big((0, 2\pi)\big)$ gibt, so daß

$$z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} w(\tau)d\tau$$

für alle $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ gilt. Insbesondere ist dann $w = z'$ fast überall. Zeigen Sie, daß $H^1(S^1)$ mit dem Hilbertraum aller absolutstetigen 2π-periodischen Funktionen mit quadratintegrierbaren Ableitungen identifiziert werden kann.

Abgabe: Mittwoch 24.11.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI