Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei Ω eine offene und konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) $f \in C^1(\Omega)$ ist genau dann konvex, wenn für die **Weierstraß'sche E-Funktion**

$$E(x,y) = f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$$

für alle $x, y \in \Omega$ gilt.

(b) $f \in C^1(\Omega)$ ist genau dann konvex, wenn ∇f **monoton** ist, d.h.

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

für alle $x, y \in \Omega$.

(c) $f \in C^2(\Omega)$ ist genau dann konvex, wenn die Hessesche $\mathrm{Hess} f$ positiv semidefinit ist.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge H aller $z \in H^1(S^1)$ mit verschwindenten Mittelwert $\int z dt$ ein Hilbertraum ist.

(b) Zeigen Sie, daß jede Hyperfläche des $\mathbb{R}^{2n}$, die unter einem Symplektomorphismus $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ auf eine kompakte strikt konvexe Hyperfläche abgebildet wird, eine geschlossene Charakteristik besitzt.

Aufgabe 3.

(a) Zu fest vorgegebenen Radius $R > 0$ sei $B(R) = B_R(0)$ der offene Ball in $\mathbb{R}^{2n}$ mit Mittelpunkt 0. Bezeichne $\hat{Z}(r)$ den "isotropen" Zylinder $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$. Zeigen Sie, daß es für alle $r > 0$ eine symplektische Einbettung von $B(R)$ in $\hat{Z}(r)$ gibt.

(b) Sei $r > 0$. Bestimmen Sie alle Charakteristiken von $\partial \hat{Z}(r)$ und $c\big(\hat{Z}(r), \omega_0\big)$ für eine beliebige Kapazität c.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, daß $|\int_\Sigma \sigma|$ für alle Flächen Σ mit Flächenform σ eine symplektische Kapazität definiert.

(b) Sei U eine offene Teilmenge von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ und $a \neq 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt $c(aU) = a^2 c(U)$ für alle Kapazitäten c.

(c) Sei c eine Kapazität. Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{2n}$, so sei $c(A)$ das Infimum über alle $c(U)$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n}$ ist, die A enthält. Zeigen Sie, daß $A \subset B$ die Ungleichung $c(A) \leq c(B)$ impliziert und daß $c\big(\varphi(A)\big) = c(A)$ gilt für alle symplektischen Einbettungen φ einer Umgebung von A in $\mathbb{R}^{2n}$. Berechnen Sie $c\big(\overline{B(r)}\big)$.

(d) Die Gromovsche Weite einer geschlossenen symplektischen Mannigfaltigkeit ist endlich.

Bonusaufgabe. Im folgenden seien für eine Hamiltonsche Funktion H auf $\mathbb{R}^{2n}$ und für 2π-periodische Abbildungen $x \in C^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{2n}$ die Funktionale

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle Jx, \dot{x} \rangle dt \ , \qquad\qquad I(x) = \int_0^{2\pi} H(x) dt$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des **Rabinowitz'schen Wirkungsfunktionals**

$$\Phi(x, a) = \mathcal{A}(x) - aI(x) \ ,$$

wobei der Lagrangesche Multiplikator $a \in \mathbb{R}$ als weitere Variable aufgefaßt werden soll.

(b) Vergleichen Sie diese mit den kritischen Punkten des Wirkungsfunktionals $\Phi(x) = \mathcal{A}(x) - I(x)$ der klassischen Mechanik.

Abgabe: Mittwoch 01.12.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI