Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 7

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, daß eine symplektische Kapazität auch wie folgt definiert werden kann: Eine symplektische Kapazität c ist eine Abbildung auf der Klasse aller symplektischen Mannigfaltigkeiten (M,ω) der Dimension $2n$ mit Werten in $[0,+\infty]$, so daß gilt:

(c_1) Ist $\varphi:(M,\omega)\to(N,\tau)$ eine glatte Einbettung mit $\varphi^*\tau = a\omega$ für eine reelle Zahl $a\neq 0$, so gelte $|a|c(M,\omega)\leq c(N,\tau)$.

(c_2) $c\big(B(1)\big)=\pi=c\big(Z(1)\big)$

(b) Sei S^1_r der Kreis vom Radius $r>0$. Berechnen Sie $c\big(S^1_r\big)$ für alle Kapazitäten c.

(c) Sei c eine Kapazität, dann gibt es für jede relativ kompakte offene Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^{2n}$ Konstanten $0<a<b$ mit $a\leq c(U)\leq b$. Was kann man allgemeiner über symplektische Mannigfaltigkeiten (M,ω) aussagen?

(d) Sei (M,ω) eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß die Gromovsche Weite $D(M,\omega)$ endlich ist.

(e) Sei c eine Kapazität und $E(r_1,\ldots,r_n)$ das offene Ellipsoid in $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ gegeben durch $\{q=q_{r_1,\ldots,r_n}<1\}$, wobei

$$q(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k^2}|z_k|^2$$

für positive reelle Zahlen $r_1,\ldots,r_n$. Bestimmen Sie alle geschlossenen Charakteristiken und berechnen Sie $c\big(E(r_1,\ldots,r_n)\big)$.

Aufgabe 2. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^{2n}$ eine offene und beschränkte Teilmenge und $W\subset\mathbb{R}^{2n}$ ein Unterraum der Kodimension 2. Zeigen Sie, daß dann für den Zylinder $\Omega+W$ gilt:

(a) Ist W symplektisch, so gilt $0<c(\Omega+W)<+\infty$.

(b) Ist W koisotrop, so gilt $c(\Omega+W)=+\infty$.

Aufgabe 3. Sei c eine Kapazität. Die **innere Kapazität** zu c sei

$$\check{c}(M,\omega) = \sup\{c(U,\omega) \mid U \subset M \text{ offen und } \bar{U} \subset M \setminus \partial M\} \ .$$

Eine Kapazität c heißt **von innen regulär**, falls $\check{c}(M,\omega) = c(M,\omega)$ für alle symplektischen Mannigfaltigkeiten (M,ω).

(a) Zeigen Sie, daß $\check{c}$ von innen regulär ist.

(b) Zeigen Sie: $\check{c} \leq c$.

(c) Ist d eine weitere von innen reguläre Kapazität mit $d \leq c$, so gilt auch $d \leq \check{c}$.

(d) Ist die Gromovsche Weite von innen regulär?

Aufgabe 4. Wir betrachten den Hilbertraum $H^s(S^1)$, $s \geq 0$, aller

$$z(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k e^{ik\tau} \in L^2(S^1) \ , \quad \text{für die gilt:} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2s} |z_k|^2 < \infty \ ,$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle z, w \rangle_s = z_0 \bar{w}_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2s} z_k \bar{w}_k$$

und zugehöriger Norm $\|z\|_s^2 = \langle z, z \rangle_s$. Zeigen Sie, daß die Inklusionsabbildung $I : H^s \to H^t$, $0 \leq t < s$, kompakt ist.

Hinweis: Man approximiere I geeignet durch Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.

Bonusaufgabe. In der Notation aus Aufgabe 4 sei der zu $I : H^s \to H^t$, $0 \leq t < s$, adjungierte Operator $I^* : H^t \to H^s$ durch $\langle I(z), w \rangle_t = \langle z, I^*(w) \rangle_s$ für alle $z \in H^s$ und $w \in H^t$ definiert. Nach dem Satz von Schauder ist dann auch I^* ein kompakter Operator. Zeigen Sie direkt, daß $I^* : L^2 \to H^{1/2}$ ein kompakter Operator ist, indem Sie die folgenden Schritte ausführen:

(a) Zeigen Sie, daß für alle $w \in H^t$ gilt:

$$I^*\big(w(\tau)\big) = w_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{w_k}{|k|^{2(s-t)}} e^{ik\tau} \ .$$

(b) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von I^* auf H^{2t} ein stetiger (sogar ein isometrischer) Operator von H^{2t} nach H^{2s} ist.

(c) Zeigen Sie, daß $I^* : H^{2t} \to H^{2s} \to H^s$ kompakt ist und betrachten Sie den Spezialfall $t = 0, s = 1/2$.

Abgabe: Mittwoch 08.12.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI