WS 2010/11 Dr. Kai Zehmisch

Symplektische Geometrie und Hamiltonsche Dynamik

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei c eine Kapazität und φ_j eine Folge stetiger Abbildungen $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, die lokal gleichmäßig gegen φ konvergiert. Für alle $\varepsilon > 0$ und für all $j \in \mathbb{N}$ gelte

$$c\Big(\varphi_j\big(B(\varepsilon)\big)\Big) = c\big(B(\varepsilon)\big) .$$

Ist dann φ in Null differenzierbar, so ist $d\varphi(0)$ invertierbar.

Aufgabe 2. Sei c eine von innen (oder von außen) reguläre Kapazität und φ_j eine Folge von Homöomorphismen $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, die lokal gleichmäßig gegen einen Homöomorphismus φ konvergiert, so daß auch φ_j^{-1} lokal gleichmäßig gegen φ^{-1} konvergiert. Ist

$$c\big(\varphi_j(U)\big) = c(U)$$

für alle $U \in \mathcal{O}$ und für all $j \in \mathbb{N}$, so auch $c\big(\varphi(U)\big) = c(U)$ für alle $U \in \mathcal{O}$.

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\omega = \omega_0$. Sei $S = S^T > 0$ eine positiv definite symmetrische Matrix. Dann ist die zugehörige quadratische From $q = q_S$ gegeben durch

$$q(x) = \tfrac{1}{2}\langle Sx, x\rangle$$

und die zugehörige Bilinearform durch $\hat{q}(x, y) = \langle Sx, y\rangle$.

(a) Zeigen Sie, daß die Bilinearform ω auf

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mid q(x) + q(y) = 1\}$$

ein Maximum $(a, b) \in M$ hat.

(b) Finden Sie eine geeignete S^1-Operation auf $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, die die Bilinearformen ω und K gegeben durch $K(x, y) = q(x) + q(y)$ invariant läßt. Diskutieren Sie damit die Eindeutigkeit von $(a, b) \in M$ aus Aufgabe (a).

(c) Zeigen Sie mittels der Lagrangschen Multiplikatorenregel, daß für $(a, b) \in M$ aus Aufgabe (a) gilt: Es gibt ein $\lambda > 0$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\hat{q}(a, x) = \lambda\omega(x, b) , \qquad \hat{q}(b, y) = \lambda\omega(a, y) .$$

(d) Zeigen Sie mittels der Parallelogrammidentität, daß $V_1 = \mathrm{Lin}\{a, b\}$ ein symplektischer Unterraum ist, dessen symplektisch orthogonales Komplement auch bzgl. $\hat{q}$ orthogonal zu V_1 ist.

(e) Zeigen Sie iterativ: Es gibt $A \in \mathrm{Sp}(n)$ und eindeutig besimmte reelle Zahlen λ_k mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, so daß

$$q(Ax) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k^2 + y_k^2)$$

mit $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ gilt.

(f) Sei X_q das Hamiltonsche Vektorfeld zu q. Dann gilt $X_q(x) = JSx$ und die λ_k aus Aufgabe (e) sind als die Eigenwerte $\pm i\lambda_k$ der linearen Abbildung $z \mapsto X_q(z)$, $z = x + iy$, eindeutig charakterisiert.

(g) Die **symplektischen Radien** $r(q) = (r_1, \ldots, r_n)$ von q seinen durch $\lambda_k = 2/r_k^2$ gegeben. Zeigen Sie, daß für alle $A \in \mathrm{Sp}(n)$ gilt: $r(q) = r(q \circ A)$. Sind ferner q_1, q_2 positv definite quadratische Formen mit $r(q_1) = r(q_2)$, so gibt es $A \in \mathrm{Sp}(n)$ mit $q_2 = q_1 \circ A$.

Aufgabe 4. Sei $E = \{q < 1\}$ das durch die positv definite quadratische Form q gegebene offene Ellipsoid. Bestimmen Sie den Hamiltonschen Fluß zu X_q und berechnen Sie $c(E)$ für alle Kapazitäten c.

Abgabe: Mittwoch 15.12.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI