Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. P. Littelmann

Sommersemester 2017
19. Juli 2017

Lösungen zur Klausur über Lie-Algebren

Dies ist keine "Muster"-Lösung, sondern eine Hilfe um die Lösung zu finden

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(1) Geben Sie die Definitionen einer Lie-Algebra über einem Körper k und einer Lie-Unteralgebra an.

(2) Sei $\mathfrak{H}$ der $\mathbb{C}$-Untervektorraum der $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$, der erzeugt wird von
$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathfrak{H}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ ist.

(3) Ist $\mathfrak{H}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

(1) Eine Lie-Algebra ist ein k-Vektorraum L versehen mit einer bilinearen Abbildung
$$L \times L \to L, (\ell_1, \ell_2) \mapsto [\ell_1, \ell_2],$$
so dass zusätzlich: *a)* $[\ell, \ell] = 0$ für alle $\ell \in L$, und *b)* die Jacobi Identität gilt. Eine Lie-Unteralgebra ist ein Untervektorraum $L' \subseteq L$, so dass gilt:
$$[\ell_1, \ell_2] \in L' \quad \text{für alle} \quad \ell_1, \ell_2 \in L'.$$
(2) Die drei Matrizen A, B, C bilden eine Basis des Untervektorraums der echten oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{H}$ in $M_3(\mathbb{C})$. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine Lie-Unteralgebra, es gilt genauer:
$$[A, B] = C, \ [A, C] = [B, C] = 0 \text{ und somit: } [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subseteq \mathfrak{H}.$$
(3) Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Lie-Algebra: $\mathfrak{H}^1 = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = \mathbb{C}C$, $\mathfrak{H}^2 = [\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^1] = [\mathbb{C}C, \mathbb{C}C] = 0$. Eine nilpotente Lie-Algebra kann aber nicht isomorph sein zur einer einfachen Lie-Algebra, und $\mathfrak{sl}_2$ ist laut Vorlesung eine einfache Lie-Algebra.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(1) Geben Sie die Definition einer Darstellung von einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k an. Was muss gelten damit eine Darstellung treu ist?

(2) Betrachten Sie für eine beliebige Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über k die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}\,\mathfrak{g}, \\ x &\mapsto \mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$. Zeigen Sie, dass ad eine Darstellung definiert.

(3) Welche Eigenschaften muss $\mathfrak{g}$ haben, damit ad treu ist?

---

(1) Eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einen Körper k ist ein Paar (V, ρ), wobei V ein k-Vektorraum ist und $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ ist ein Lie-Algebrahomomorphismus ist. Das bedeutet: ρ ist linear und respektiert die Lie Klammern in $\mathfrak{g}$ und $\mathrm{End}(V)$: $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Die Darstellung heißt treu, wenn sie injektiv ist.
(2) Die Abbildung $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \to [x, y] = ad_x(y)$, ist bilinear. Das bedeutet erstens, dass die Abbildung $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linear ist, und somit $ad_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, und zweitens, dass die Abbildung $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto ad_x$ linear ist. Um zu zeigen, dass ad eine Darstellung ist, muß man noch zeigen: $ad_{[x,y]} = [ad_x, ad_y]$. Dank der Jacobi Identität gilt für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$ad_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = [x, [y, z]]+[y, [z, x]] = ad_x(ad_y(z))-ad_y(ad_x(z)) = [ad_x, ad_y](z),$$

was zu beweisen war.
(3) Der Kern der adjungierten Darstellung ad ist genau das Zentrum von $\mathfrak{g}$. ad ist also treu dann und nur dann wenn das Zentrum von $\mathfrak{g}$ gleich 0 ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

(1) Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k halbeinfach ist.

(2) Geben Sie (ohne Beweis) eine Formel für die Killingform der $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ an, die nur von $\mathrm{tr}(A)$ und nicht von $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A)$ für $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ abhängt. Zeigen Sie damit, dass die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nicht halbeinfach ist.

(3) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $R \subset V$ ein irreduzibles Wurzelsystem mit zwei verschiedenen Wurzellängen. Zeigen Sie, dass die Menge
$$R' := \{\alpha \in R \mid \alpha \text{ lang}\} \subset R$$
ein Wurzelsystem bildet. Geben Sie ein Beispiel für R und R' an.

---

(1) $\mathfrak{g}$ ist die direkte Summe einfacher Ideale.
(2) Es gilt: $\kappa(ad_A, ad_B) = 2ntr(AB) - 2tr(A)tr(B)$. Sei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix, dann gilt für alle $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$:
$$\kappa(ad_A, ad_{\mathbf{1}}) = 2ntr(A\mathbb{1}) - 2tr(A)tr(\mathbb{1}) = 0.$$
Die Killing-Form ist also ausgeartet, und damit ist $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nicht halbeinfach.
(3) Als Teilmenge der endlichen Menge R ist R' endlich, und da $0 \notin R$ folgt $0 \notin R'$. Da R irreduzibel ist, liegen die Wurzeln der gleichen Länge in einem Weylgruppenorbit. Der Orbit einer Wurzel spannt aber (Vorlesung) den Raum V auf. Weiter gilt: ist $\alpha \in R'$, dann gilt $\alpha \in R$ und somit $-\alpha \in R$, und da die beiden die gleiche Länge haben, folgt $-\alpha \in R'$. Da $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$ folgt somit $\mathbb{R}\alpha \cap R' = \{\alpha, -\alpha\}$. Die Integralitätsbedingung: $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in R'$ ist erfüllt, da sie für alle $\alpha, \beta \in R$ erfüllt ist. Da die Spiegelungen die Länge einer Wurzel nicht ändert, folgt aus $s_\alpha(R) \subset R$ automatisch $s_\alpha(R') \subset R'$, was zu beweisen war.

Ein Beispiel ist das Wurzelsystem vom Typ $\mathtt{B}_2$, dann ist $R = \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2, \pm\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ und $R' = \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2\}$ ist ein Wurzelsystem vom Typ $\mathtt{A}_1 \times \mathtt{A}_1$.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ zusammen mit der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Auf $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hat man die Killing-Form:

$$\kappa : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \kappa(A, B) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}B)).$$

Wir haben somit auf dem 3-dimensionalen Vektorraum $V = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform κ.

(1) Definieren Sie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ bezüglich der Form κ.

(2) Folgern Sie $\mathrm{ad}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \subset \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ und zeigen Sie $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ ist ein Isomorphismus.

(3) Was aus Teil (2) funktioniert auch für $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ und was nicht?

---

(1) Die $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ bezüglich der symmetrischen, nicht ausgearteten Form κ auf $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist

$$\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid \kappa(Ax, y) + \kappa(x, Ay) = 0 \ \forall x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\}.$$

(2) Für $x, y, z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(ad_x(y), z) + \kappa(y, ad_x(z)) &= \kappa([x, y], z) + \kappa(y, [x, z]) \\ &= -\kappa([y, x], z) + \kappa(y, [x, z]) \\ &= -\kappa(y, [x, z]) + \kappa(y, [x, z]) = 0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

also folgt $ad_x \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ für alle $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Da $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ eine einfache Lie-Algebra ist, ist die Abbildung ad injektiv. Da $\dim \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3 = \dim \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, ist die Abbildung auch surjektiv, und somit (siehe Aufgabe 2) ein Lie-Algebraisomorphismus.

(3) In dem Teil (0.1) wurde nur die Eigenschaft $\kappa([y, x], z) = \kappa(y, [x, z])$ der Killing Form benutzt, die gilt auch für die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (oder allgemeiner, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$). Weiterhin ist $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ eine einfache Lie-Algebra, die adjungierte Darstellung induziert also einen injektiven Lie-Algebrahomomorphismus

$$ad : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}_8(\mathbb{C}).$$

Allerdings gilt $\dim \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = 8 < 28 = \dim \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$, die Abbildung ist also nicht surjektiv.