

Lie-Algebren - Übungsblatt 10

(Besprechung in der Übung am 12.07.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

Sei V ein euklidischer Raum über \mathbb{R} und $R \subset V$ ein Wurzelsystem mit Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Sei V^* der Dualraum zu V und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\langle f, v \rangle = f(v)$ für $f \in V^*$ und $v \in V$. Sei $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$, definiere

$$R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\} \subset V^* \text{ und } \Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset R^\vee.$$

Die Weylgruppe W zu R wird erzeugt von $\{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}\}$, wobei für $v \in V$ und $\alpha \in R$ gilt

$$s_\alpha(v) = v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha.$$

Aufgabe 1:

- (1) Zeigen Sie, dass $R^\vee \subset V^*$ ein Wurzelsystem ist.
- (2) Zeigen Sie, dass die Weylgruppe zu R^\vee isomorph ist zur Weylgruppe W .
- (3) Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $R' = \{\lambda\alpha \mid \alpha \in R\}$. Zeigen Sie, dass R' ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W ist.

Aufgabe 2:

Sei R das zu \mathfrak{sp}_6 gehörende Wurzelsystem.

- (1) Geben Sie eine Basis Δ an und bestimmen Sie Δ^\vee .
- (2) Gibt es ein Beispiel einer Wurzel $\beta \in R$, die folgendes erfüllt
$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ und } \beta^\vee \neq c_1\alpha_1^\vee + c_2\alpha_2^\vee + c_3\alpha_3^\vee ?$$
- (3) Berechnen Sie das Dynkindiagramm von R .

Dies ist das letzte Übungsblatt, wir wünschen euch viel Erfolg in der Klausur am 19.07.2017 um 10:00 im Hörsaal des MI!!!
