

## Lie-Algebren - Übungsblatt 10

(Besprechung in der Übung am 12.07.2017)

---

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

---

Sei  $V$  ein euklidischer Raum über  $\mathbb{R}$  und  $R \subset V$  ein Wurzelsystem mit Basis  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Sei  $V^*$  der Dualraum zu  $V$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $\langle f, v \rangle = f(v)$  für  $f \in V^*$  und  $v \in V$ . Sei  $\alpha^\vee \in V^*$  mit  $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ , definiere

$$R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\} \subset V^* \text{ und } \Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset R^\vee.$$

Die Weylgruppe  $W$  zu  $R$  wird erzeugt von  $\{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}\}$ , wobei für  $v \in V$  und  $\alpha \in R$  gilt

$$s_\alpha(v) = v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha.$$

### Aufgabe 1:

- (1) Zeigen Sie, dass  $R^\vee \subset V^*$  ein Wurzelsystem ist.
- (2) Zeigen Sie, dass die Weylgruppe zu  $R^\vee$  isomorph ist zur Weylgruppe  $W$ .
- (3) Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $R' = \{\lambda\alpha \mid \alpha \in R\}$ . Zeigen Sie, dass  $R'$  ein Wurzelsystem mit Weylgruppe  $W$  ist.

### Aufgabe 2:

Sei  $R$  das zu  $\mathfrak{sp}_6$  gehörende Wurzelsystem.

- (1) Geben Sie eine Basis  $\Delta$  an und bestimmen Sie  $\Delta^\vee$ .
- (2) Gibt es ein Beispiel einer Wurzel  $\beta \in R$ , die folgendes erfüllt  
$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ und } \beta^\vee \neq c_1\alpha_1^\vee + c_2\alpha_2^\vee + c_3\alpha_3^\vee ?$$
- (3) Berechnen Sie das Dynkindiagramm von  $R$ .

---

Dies ist das letzte Übungsblatt, wir wünschen euch viel Erfolg in der Klausur am 19.07.2017 um 10:00 im Hörsaal des MI!!!

---