Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 2

(Abgabe in der Übung am 03.05.2017, Besprechung in der Übung am 10.05.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

Aufgabe 1:
Seien L_1 und L_2 zwei abelsche Lie-Algebren über k. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

$$L_1 \simeq L_2 \Leftrightarrow \dim_k L_1 = \dim_k L_2 \Leftrightarrow Z(L_1) \simeq Z(L_2)$$

Aufgabe 2:
Sei $\mathfrak{g}$ die Menge aller 3×3-Matrizen mit komplexen Einträgen, für die gilt $M^t = -M$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ eine 3-dimensionale Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 3:
Sei $R = \mathbb{C}[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen, $n \in \mathbb{N}$ und R_n der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in X und Y. Also hat R_n eine Basis $\{X^n, X^{n-1}Y, \ldots, Y^n\}$ und Dimension $n + 1$. Wir definieren

- $A = X \circ \frac{\partial}{\partial Y}$ (erst nach Y ableiten, dann mit X multiplizieren),
- $B = Y \circ \frac{\partial}{\partial X}$,
- $C = X \circ \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}$.

Zeigen Sie, dass A, B, C Elemente in $End_{\mathbb{C}}(R_n) = \mathfrak{gl}(n + 1, \mathbb{C})$ sind. Sei L_n der von A, B, C aufgespannte Vektorraum. Zeigen Sie L_n ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}(n + 1, \mathbb{C})$.