Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 3

(Besprechung in der Übung am 17.05.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Stefan-Cohn-Vossen Raum (MI, Raum 313) statt.

Aufgabe 1:
Sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine endliche Gruppe. Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ ist ein Vektorraum mit Basis G, die Elemente von $\mathbb{C}G$ sind also Linearkombinationen der Form $\sum_j a_j g_j$ mit $a_j \in \mathbb{C}$. Ausserdem ist $\mathbb{C}G$ ein Ring mit Multiplikation

$$\left(\sum_j a_j g_j\right)\left(\sum_k b_k g_k\right) = \sum_{j,k} a_j b_k (g_j g_k).$$

(1) Bestimmen Sie das Einselement.

(2) $\mathbb{C}G$ ist eine Lie-Algebra mit $[a,b] = ab - ba$. Sei $L(G)$ der Untervektorraum von $\mathbb{C}G$ der von $\{\hat{g} := g - g^{-1} \mid g \in G\}$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $L(G)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathbb{C}G$ ist.

(3) Beweisen Sie folgende Aussagen über $L(G)$:
 (a) $\dim_{\mathbb{C}} L(G) = \frac{1}{2}|\{g \in G \mid g \neq g^{-1}\}|$.
 (b) G abelsch $\Longrightarrow L(G)$ abelsch.
 (c) $G = S_3 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} L(G) = 1$.
 (d) $G = Q_8$ (Quaternionengruppe), dann gilt $L(G) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2:
Sei $V = \mathbb{C}^{2n}$ mit Standardbasis $e_1, \dots, e_{2n}$. Wir definieren eine symplektische Form $\Omega : V \times V \to \mathbb{C}$ durch $\Omega(e_i, e_{i+n}) = 1, \Omega(e_{i+n}, e_i) = -1$ für $1 \leq i \leq n$ und $\Omega(e_i, e_j) = 0$ sonst.

(1) Geben Sie eine Matrix $M \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ an, so dass $\Omega(x,y) = x^t \cdot M \cdot y$ für alle $x, y \in V$.

(2) Sei $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{End}(V) \mid \Omega(Xv, w) + \Omega(v, Xw) = 0 \forall v, w \in V\}$. Zeigen Sie $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.

(3) Geben Sie $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ explizit in Form einer Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ bezüglich der Standardbasis von V an.