Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

# Lie-Algebren - Übungsblatt 4

(Besprechung am 17.05.2017/31.05.2017)

---

Am 24.05.2017 fällt die Übung aus, die Besprechung wird vor- und nachgeholt am 17.05 und 31.05.2017

---

**Aufgabe 1:**
Betrachte die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ über $k = \mathbb{C}$ mit einer Basis gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie die Abbildungsmatrizen bezüglich der oben genannten Basis von $ad_H, ad_E, ad_F : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$.

(2) Geben Sie eine Matrix $M \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ an, so dass für die Killing-Form

$$\kappa : \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \to \mathbb{C}, \kappa(x, y) = \mathrm{tr}(ad_x \circ ad_y)$$

gilt $\kappa(x, y) = x^T M y$.

**Aufgabe 2:**
Sei $k = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen, sei $V = k^2$ und seien

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathfrak{gl}(V).$$

(1) Zeigen Sie, dass der Unterraum $L$ mit Basis $x$ und $y$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass $L$ auflösbar ist.

(3) Zeigen Sie, dass $V$ keine Basis besitzt, bezüglich derer $L$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{b}^+(V)$ (obere Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}(V)$) wäre.