Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 5

(Besprechung in der Übung am 31.05.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Raum 313 (MI) statt.

Aufgabe 1:
Sei L_1 die eindimensionale Lie-Algerba $\mathbb{C}$, und L_2, L_3 die Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ mit

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \right\} \text{ und } L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

(1) Verifizieren Sie, dass L_2 und L_3 Lie-Unteralgebren sind und dass L_1, L_2, L_3 alle paarweise isomorph sind.

(2) Vergleichen Sie die Jordan-Zerlegung in L_1 mit der in $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ und den Lie-Unteralgebren L_2 und L_3.

Aufgabe 2:
Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Zeigen Sie die folgende Formel für die Killing-Form

$$\kappa(a,b) = 2n\ \mathrm{tr}(ab) - 2\ \mathrm{tr}(a)\,\mathrm{tr}(b).$$

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach? Ist $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ halbeinfach?

Aufgabe 3:
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $L \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Der *Normalisator* von L in $\mathfrak{g}$ ist definiert als

$$N_{\mathfrak{g}}(L) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] \in L \forall y \in L\}.$$

Sei nun $\mathfrak{g}$ eine der folgenden Lie-Algebren: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ für entsprechendes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ bestehend aus Diagonalmatrizen gilt: $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jede Wahl von $\mathfrak{g}$ ein $t \in \mathfrak{t}$ existiert mit paarweise verschiedenen Eigenwerten.)