Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 7

(Besprechung in der Übung am 21.06.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

Aufgabe 1:
Wir betrachten $k = \mathbb{C}$ und $\mathfrak{sp}_{2n} = \{X \in M_{2n\times 2n} \mid X^T M + MX = 0\}$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $M_{n\times n}$ bezeichnet.

(1) Zeigen Sie, dass die Diagonalmatrizen $\mathfrak{t} \in \mathfrak{sp}_{2n}$ eine Cartan-Unteralgebra bilden und dass eine Basis gegeben ist durch $H_j = E_{j,j} - E_{j+n,j+n} \in M_{2n\times 2n}$ für $1 \leq j \leq n$.

(2) Sei $\{\varepsilon_j\}_j$ die zu $\{H_j\}_j$ duale Basis des dualen Vektorraums $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$, also $\varepsilon_j(H_i) = \delta_{i,j}$. Bestimmen Sie bezüglich der Operation von $\mathfrak{t}$ Eigenvektoren in $\mathfrak{sp}_{2n}$ zu

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j, 2\varepsilon_i, \text{ und } -2\varepsilon_i.$$

Zur Erinnerung: X ist Eigenvektor zu $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, wenn für alle $H \in \mathfrak{t}$ gilt

$$ad_H(X) = \varepsilon(H)X.$$

(3) Sei $X_{i,j}$ Eigenvektor zu $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Bestimmen Sie die Lie-Klammer $[X_{i,j}, X_{j,i}]$. Für welches $H \in \mathfrak{t}$ gilt, dass $\langle X_{i,j}, X_{j,i}, H\rangle$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$ ist? Gibt es weitere solche Tripel?

Aufgabe 2:
Wir betrachten $k = \mathbb{C}$ und $\mathfrak{so}_{2n+1} = \{X \in M_{(2n+1)\times(2n+1)} \mid X^T M + MX = 0\}$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $M_{n\times n}$ bezeichnet.

(1) Zeigen Sie, dass die Diagonalmatrizen $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{so}_{2n+1}$ eine Cartan-Unteralgebra bilden und dass eine Basis gegeben ist durch $H_j = E_{j,j} - E_{j+n,j+n} \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}$ für $1 \leq j \leq n$.

(2) Sei $\{\varepsilon_j\}_j$ die zu $\{H_j\}_j$ duale Basis des dualen Vektorraums $\mathfrak{t}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$, also $\varepsilon_j(H_i) = \delta_{i,j}$. Bestimmen Sie bezüglich der Operation von $\mathfrak{t}$ Eigenvektoren in $\mathfrak{so}_{2n+1}$ zu

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i \text{ und } -\varepsilon_i \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

(3) Sei $X_{i,j}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Bestimmen Sie die Lie-Klammer $[X_{i,j}, X_{j,i}]$. Für welches $H \in \mathfrak{t}$ gilt, dass $\langle X_{i,j}, X_{j,i}, H\rangle$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$ ist? Gibt es weitere solche Tripel?