Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 8

(Besprechung in der Übung am 28.06.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

Aufgabe 1:
Sei $k = \mathbb{C}$ und betrachten Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_4$ mit den Diagonalmatrizen als Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{t}$. Sei

$$R = \{\pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \pm 2\varepsilon_1, \pm 2\varepsilon_2\} \subset \mathfrak{t}^*$$

das dazugehörige Wurzelsystem.

(1) Verifizieren Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$, wobei $\alpha^\vee \in \mathfrak{t}$ die Kowurzel zu α ist.

(2) Verifzieren Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt, dass $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$.

Hinweis: Die Kowurzeln wurden auf Blatt 7 berechnet und sind die folgenden: $H_i - H_j$ zu $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $H_i + H_j$ zu $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, $-H_i - H_j$ zu $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ für $i \neq j$ in $\{1,2\}$ und H_i zu $2\varepsilon_i$, $-H_i$ zu $-2\varepsilon_i$ für $i \in \{1,2\}$ und $H_i = E_{i,i} - E_{2+i,2+i}$.

Aufgabe 2:
Betrachten Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$ über $\mathbb{C}$. Wir definieren

$$\widetilde{\mathfrak{sl}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix} \mid f_{ij}(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}], f_{11}(t) + f_{22}(t) = 0 \right\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass alle Elemente in $\widetilde{\mathfrak{sl}_2}$ sich schreiben lassen als eine Summe von Elementen der Form $f(t)x$ für $f(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ und $x \in \mathfrak{sl}_2$.

(2) Zeigen Sie, $\widetilde{\mathfrak{sl}_2}$ ist eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer gegeben durch $[A, B] = AB - BA$. Verwenden Sie (1) um zu zeigen, dass für $f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ und $x, y \in \mathfrak{sl}_2$ gilt $[f(t)x, g(t)y] = f(t)g(t)[x, y]$.

(3) Zeigen Sie, dass eine Cartan-Unteralgebra von $\widetilde{\mathfrak{sl}_2}$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\} \subset \widetilde{\mathfrak{sl}_2}.$$

Berechnen Sie die Wurzelunterräume in $\widetilde{\mathfrak{sl}_2}$ bezüglich $\mathfrak{t}$ und bestimmen Sie zugehörige $\mathbb{C}$-Basen.

Zur Erinnerung: Ein Element h in einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach genau dann wenn es *ad-halbeinfach* ist, d.h. es gibt eine Basis B von $\mathfrak{g}$, so dass für alle $x \in B$ gilt $\mathrm{ad}_h(x) = [h, x] = cx$ für ein $c \in \mathbb{C}$.