Prof. Dr. Peter Littelmann
Lara Bossinger
http://www.mi.uni-koeln.de/~lbossing/liess17.html

Lie-Algebren - Übungsblatt 9

(Besprechung in der Übung am 05.07.2017)

Die Übung findet jeweils Mittwochs von 16:00 - 17:30 im Seminarraum 1 (MI) statt.

Auf diesen Blatt betrachten Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3$ über $\mathbb{C}$ mit der Cartan-Unteralgebra der Diagonalmatrizen

$$\mathfrak{t} = \left\{ H = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{smallmatrix}\right) \mid h_1 + h_2 + h_3 = 0 \right\}.$$

Aufgabe 1:
Sei $\varepsilon_i \in \mathfrak{t}^*$ gegeben durch $\varepsilon_i(H) = h_i$. Somit gilt $\mathfrak{t}^* = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle_{\mathbb{C}} / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0)$.

(1) Zeigen Sie, dass $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ eine Basis von $\mathfrak{t}^*$ ist. Bestimmen Sie alle weiteren Wurzeln und die zugehörigen Kowurzeln.

(2) Bestimmen Sie die $\mathfrak{sl}_2$-Tripel zu α_1 und α_2, d.h. Elemente $X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i} \in \mathfrak{sl}_3$ mit $[H, X_{\alpha_i}] = \alpha_i(H) X_{\alpha_i}, [H, Y_{\alpha_i}] = -\alpha_i(H) Y_{\alpha_i}$ für alle $H \in \mathfrak{t}$, und $\alpha_i^\vee \in \langle [X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}] \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{t}$ mit $\langle \alpha_i^\vee, X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$. Hinweis: es gibt drei.

Aufgabe 2:
Zu jeder Wurzel α definieren wir $t_\alpha = \frac{\alpha^\vee}{\kappa(X_\alpha, Y_\alpha)}$, wobei κ die Killingform ist. Auf $\mathfrak{t}^*$ definieren wir $\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$. Sei weiterhin $\langle \ , \ \rangle : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2\kappa(\alpha,\beta)}{\kappa(\beta,\beta)}$.

(1) Berechnen Sie die Killingform für alle Paare von positiven Wurzeln, d.h. Wurzeln der Form $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ für $i < j$.

(2) Zeigen Sie, dass $\langle \ , \ \rangle$ mit der kanonischen Form $(\ , \ ) : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ induziert durch $(\varepsilon_i, E_{j,j}) = \delta_{i,j}$ übereinstimmt. Geben Sie bezüglich der Basen $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ von $\mathfrak{t}^*$ und $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$ von $\mathfrak{t}$ die Matrix $(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle)_{i,j}$ an.

Aufgabe 3:
Es gilt für die Längen der Wurzeln $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle}$ und somit für α, β

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}.$$

Für die Winkel zwischen Wurzeln können wir dann folgern

$$2 \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} \cos(\sphericalangle(\alpha, \beta)) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle.$$

(1) Berechnen Sie die Längen aller Wurzeln und die Winkel $\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)$,$\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$, und $\sphericalangle(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$.

(2) Zeichnen Sie das Wurzelsystem in der $\mathbb{R}^2$-Ebene.