Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Dr. L. Galinat

WiSe 2016/2017
Dienstag, 27.09.2016
Blatt 12

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 41. Beweisen Sie (mit allen Details, die in der Vorlesung weggelassen wurden), dass Polynome differenzierbar sind und bestimmen Sie deren erste Ableitung.

Aufgabe 42. Beweisen Sie für die folgenden Funktionen, dass diese nicht differenzierbar sind.
(1) $f(x) = |x+a|$ für eine reelle Zahl a.
(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
(3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -5 \\ 1 & x > -5 \end{cases}$

Aufgabe 43. Sei a eine nicht-negative reelle Zahl. Wir definieren induktiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}$$

Beweisen Sie:
(1) Es gilt $a_n^2 - a \geq 0$ für alle $n \geq 1$.
(2) Es gilt $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.
Wie wir später sehen werden, impliziert dies die Konvergenz der Folge. Nehmen Sie diese nun an.
Beweisen Sie:
(3) $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 - a}{2a_n}$ für alle $n \geq 1$.
(4) $(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = a$.
(5) Es gibt höchstens eine nicht-negative Zahl b mit $b^2 = a$.
Wir schreiben auch $\sqrt{a}$ für sie.

Aufgabe 44. Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass diese für alle $x > 0$ differenzierbar ist (hierbei dürfen Sie verwenden, dass $\lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$) und dass die Wurzelfunktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Besprechung: Dienstag, 27.09.2016 in den Übungen