Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Dr. L. Galinat

WiSe 2016/2017
Mittwoch, 28.09.2016
Blatt 13

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 45. Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen auf ihrem gesammten Definitionsbereich differenzierbar sind und bestimmen Sie die erste Ableitung.
(1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-5}}$
(2) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{(x^2+4)^5}$
(3) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+2}$

Aufgabe 46. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
(1) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) streng monoton wachsend.
(2) Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) streng monoton fallend.
(3) Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) monoton wachsend.
(4) Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) monoton fallend.
(5) Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f auf (a,b) konstant.

Aufgabe 47. Überprüfen Sie den Mittelwertsatz per Hand für die Funktion

$$f(x) = x^2,$$

d.h. finden Sie für je zwei reelle Zahlen $a < b$ ein x_0 mit $a < x_0 < b$, so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Aufgabe 48. Beweisen Sie folgende beide Ungleichungen (unter Verwendung von Aufgabe 46, bzw. des Mittelwertsatzes):
(1) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x > 0$.
(2) $b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ für alle $0 < a < b$ und $n > 1$.

Besprechung: Mittwoch, 28.09.2016 in den Übungen