Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Dr. L. Galinat

WiSe 2016/2017
Donnerstag, 06.10.2016
Blatt 18

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 60. Ziel dieser Aufgabe ist es, $2 \leq \exp(1) \leq 3$ zu zeigen.

(1) Seien $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $0 \leq k \leq n$
$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

(2) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(3) Zeigen Sie nun
$$2 \leq \exp(1) \leq 3$$
unter Verwendung obiger Aussagen, des binomischen Lehrsatzes und der Bernoullischen Ungleichung.

Aufgabe 61. Beweisen Sie die folgende Aussagen unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung.

(1) Sei $p > 1$ eine reelle Zahl und sei $q \in \mathbb{R}$ eine weitere reelle Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $p^n > q$.

(2) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. Hierbei ist möglicherweise das Sandwich-Lemma von Nutzen.

(3) Für alle $x > 0$ ist $x^5 + x^4 + 7 \geq 9x$.

Aufgabe 62.

(1) Seien $x, y > 0$ positive reelle Zahlen. Beweisen Sie unter Verwendung der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, dass jedes Rechteck mit Flächeninhalt $x \cdot y$ einen Umfang von mindestens $4\sqrt{xy}$ besitzt. Welches Rechteck besitzt exakt diesen Umfang?

(2) Beweisen Sie analog, dass unter allen Quadern mit gleichem Volumen der Würfel die geringste Gesamtkantenlänge besitzt.

Besprechung: Donnerstag, 06.10.2016 in den Übungen