Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Dr. L. Galinat

WiSe 2016/2017
Donnerstag, 15.09.2016
Blatt 4

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Aufgabe 14.

(1) Zeigen Sie, dass das Produkt von fünf aufeinander folgenden ganzen Zahlen immer durch 120 teilbar ist. Beispielsweise gilt $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520 = 120 \cdot 21$.

(2) Gilt dies auch schon für das Produkt von vier aufeinander folgenden ganzen Zahlen?

Aufgabe 15.

(1) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ keine rationalen Lösungen besitzt.

(2) Wie sieht es mit der Gleichung $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ aus? Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen dieser Gleichung.

Aufgabe 16. Es sei $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ und für jedes $n \geq 2$ sei x_n induktiv als $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ definiert.

(1) Berechnen Sie $x_0, x_2, \ldots, x_8$.

(2) Zeigen Sie, dass x_{3n+2} für jedes $n \in \mathbb{N}$ gerade ist.

(3) Finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe $x_0 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}$.

(4) Finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe $x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n+1}$.

(5) Zeigen Sie

$$x_n x_{n+3} - x_{n+1} x_{n+2} = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Besprechung: Donnerstag, 15.09.2016 in den Übungen