

Übungen zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 17. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - 7n$ durch 6 teilbar.
- (2) Für alle $n \geq 1$ ist $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ durch 19 teilbar.
- (3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.
- (4) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n + 1$ nicht durch 3 teilbar.
- (5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n^3}{6} + \frac{5n}{6} + 1 = 2^n$.

Aufgabe 18.

- (1) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die bekannte Formel $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (2) Finden und beweisen Sie eine ähnliche Formel für $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
- (3) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- (4) Folgern Sie eine Formel für $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$.

Aufgabe 19. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

- (1) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$ für alle $n > 1$.
- (2) $2^n > n^3$ für alle $n \geq 10$.
- (3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} \geq \frac{n}{2}$ für alle $n \geq 1$.

Besprechung: Freitag, 16.09.2016 in den Übungen