Vorkurs Mathematik

12.9. - 7.10.2016

Die verwendeten Bilder stammen alle von Wikipedia.

1 Woche 1: Beweise

1.1 Warum Beweise?

1.1.1 Begrüßung und allgemeine Informationen

- Vorlesungsbetrieb erinnert stark an Studium.
- Übungsbetrieb weicht etwas ab, da täglich.
- Eintragen in die Listen für die Übungsgruppen.
- Fragen sind erwünscht, erst recht in den Übungen.
- Fachschaft stellt sich nachher vor.
- Mögliches Problem mit der Zugverbindung.
- Inhalt der Wochen, insbesondere der ersten Woche vorstellen.
- Es gibt einen großen Unterschied zwischen Mathematik in der Schule und Mathematik im Studium. Wie Sie sicher alle schon gehört haben, führt dieser leider zu hohen Abbrecherquoten in naturwissenschaftlichen Studienfächern. Dieser Unterschied liegt hauptsächlich in einer ganz neuen und anderen, mathematischen Denkweise, an die man sich erst gewöhnen muss und manifestiert sich für viele im Stichwort „Beweis“. Dieser Vorkurs versucht u.a. Sie an diese neue Denkweise heranzuführen. Es dauert erfahrungsgemäß aber noch deutlich länger, bis man sich wirklich daran gewöhnt hat, und das ist auch okay.

1.1.2 Warum Beweise?

Warum aber ist es wichtig, dass wir in der Lage sind Aussagen zu beweisen? Nun, häufig hängt zum Beispiel eine Menge Geld davon ab, ob eine Aussage wahr oder falsch ist und wenn wir mit Sicherheit sagen können, ob sie wahr oder falsch ist, kann uns das eine Menge Geld einbringen. Lassen Sie uns ein kleines Experiment machen: Angenommen ich habe 1000 Euro, die ich auf der Bank für zehn Jahre anlegen möchte. Bank A würde mir hierauf jährlich 1,1 Prozent Zinsen geben, Bank B jährlich 1,0 Prozent, aber mit Zinseszins und Bank C monatlich 0,8 Prozent mit Zinseszins. Sollte ich mein Geld nun bei Bank A , B oder C anlegen, wenn ich den größten Gewinn erzielen möchte? Wer ist für Bank A? Wer ist für Bank B? Wer ist für Bank C?
Gehen wir die Frage doch systematisch an und abstrahieren etwas. Angenommen wir haben ein Kapital K, welches wir für p Prozent Zinsen anlegen.

Lemma 1. *Wenn wir K Euro ohne Zinseszins für n Jahre mit p Prozent Zinsen anlegen, so erhalten wir am Ende*

$$K \cdot (1 + n\frac{p}{100})$$

Euro zurück.

Beweis. Wir wenden die Beweistechnik der vollständigen Induktion an, welche wir am Mittwoch ausgiebig besprechen werden. Hierbei prüfen wir die Aussage zunächst für $n = 0$ und dann zeigen wir, dass die falls die Aussage für n Jahre richtig ist, sie auch für $n + 1$ Jahre richtig ist.
Zunächst also den Fall von $n = 0$ Jahren. Hier legen wir überhaupt kein Geld an, sondern haben nur unser Kapital K, also ist die Aussage wahr.
Nehmen wir nun an, dass wir die Aussage für n Jahre bereits gezeigt haben. Nach n Jahren haben wir also $K \cdot (1 + n\frac{p}{100})$ Euro Kapital erhalten. Im $n+1$sten Jahr kommen nochmal die Zinsen $K \cdot \frac{p}{100}$ hinzu. Insgesammt erhalten wir nach $n+1$ Jahren also den angekündigten Betrag von $K \cdot (1+(n+1)\frac{p}{100})$ Euro. □

Das Kästchen unten rechts zeigt das Ende des Beweises an und dient der besseren Lesbarkeit mathematisher Texte.
Als Nächstes nehmen wir an, dass wir Zinseszins erhalten. Der Einfachheithalber zunächst jährlich.

Lemma 2. *Wenn wir K Euro mit Zinseszins für n Jahre mit p Prozent Zinsen anlegen, so erhalten wir am Ende*

$$K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

Euro zurück.

Beweis. Wir wenden wieder vollständige Induktion an. Der Fall $n = 0$ ist wieder klar, denn er ist identisch zu dem schon behandelten Fall. Seien nun n Jahre vergangen und wir haben $K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ Euro erhalten. Wenn wir diese nun ein weiteres Jahr mit p Prozent Zinsen verzinsen, so müssen haben wir nach $n+1$ Jahren $K \cdot (1 + \frac{p}{100})^{n+1}$ Euro und dies ist genau die Behauptung. □

Und schließlich interessieren wir uns noch für den Fall, dass wir häufiger als 1 Mal pro Jahr Zinsen erhalten:

Lemma 3. *Wenn wir K Euro mit Zinseszins für n Jahre mit p Prozent Zinsen, die m Mal pro Jahr verzinst werden, anlegen, so erhalten wir am Ende*

$$K \cdot (1 + \frac{p}{m \cdot 100})^{m \cdot n}$$

Euro zurück. Hierbei nehmen wir an, dass die m Zeiträume alle gleich groß sind.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Nun gehen wir zurück zur Anfangsfrage welche Anlageform den meisten Gewinn bringt:

Bank A	1100 Euro
Bank B	$\approx$ 1104 Euro
Bank C	$\approx$ 1083 Euro

Wenn wir also nicht 1000 Euro anlegten, sondern vielleicht sogar 10000 oder 100000, dann machte es doch schon einen bedeutenden Unterschied, welche Anlageform wir wählten!

1.2 Aussagen

Heute wollen wir uns mit der Logik, die Mathematiker in ihrem täglichen Leben verwenden befassen. Wir brauchen hierfür nur einige einfache Konzepte. Die zentrale Definition einer Aussage kommt gleich zu Beginn.

Definition 1. *Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist - aber nicht beides.*

Mathematische Definitionen sind nur dann „gut“ und „sinnvoll“, wenn es viele Beispiele gibt, die diese erfüllen. Hier einige Beispiele. Lassen Sie uns gemeinsam diskutieren, ob es sich um Aussagen handelt.

Beispiele. *Handelt es sich hierbei um Aussagen?*

- *Alle Katzen sind grau.*
- *Es gibt graue Katzen.*
- *Es gibt keine grauen Katzen.*
- *Jeder Student besitzt eine Katze.*

Nicht alle Sätze sind allerdings auch Aussagen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. *Diese Aussage ist falsch.*
Angenommen, dieser Satz wäre eine Aussage. Dann könnte er entweder wahr oder falsch sein. Wäre er wahr, so wäre er nach eigenem Bekunden zeitgleich falsch. Wäre er hingegen falsch, so wäre er nach eigenem Bekunden zeitgleich wahr. In beiden Fällen ist unsere Forderung, dass eine Aussage nur entweder wahr oder falsch, aber nie beides, sein kann, verletzt.

Aber Vorsicht! Mathematische Logik ist pedantischer, als wir das aus dem Alltag kennen!

Beispiel. *Angenommen auf diesem Tisch vor mir liegen genau drei Münzen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Bitte melden Sie sich, wenn Sie meinen, dass eine Aussage wahr ist.*

- *Es liegen vier Münzen auf dem Tisch.*
- *Es liegen zwei Münzen auf dem Tisch.*
- *Es liegen drei Münzen auf dem Tisch.*

- *Auf dem Tisch liegt mindestens eine Münze.*

Mathematisch gesehen ist nur die erste Aussage falsch.
Als nächstes wollen wir diskutieren, wie man aus Aussagen neue Aussagen konstruieren kann. Hierfür werden wir drei Operationen kennenlernen: die Negation, die Verkettung mit und, sowie die Verkettung mit oder.

Definition 2. *Sei A eine Aussage. Die Negation (Verneinung) von A, geschrieben $\neg A$, ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.*

Dies klingt zunächst kompliziert, ist aber eigentlich ganz einfach. Nehmen wir uns nochmal unsere Beispiel von eben zur Hand und bestimmen ihre Negationen.

Beispiele. *Können Sie die Verneinungen der Aussagen von vorhin bilden?*

- *Die Verneinung von „Alle Katzen sind grau“ lautet „Es gibt Katzen, die nicht grau sind“.*
- *Die Verneinung von „Es gibt graue Katzen“ lautet „Keine Katze ist grau“.*
- *Die Verneinung von „Es gibt keine grauen Katzen“ lautet „Es gibt graue Katzen“.*
- *Die Verneinung von „Jeder Student besitzt eine Katze“ lautet „Es gibt einen Studenten, der keine Katze besitzt“.*

In diesem Beispiel sehen wir ein wichtiges Prinzip: Wenn man eine „für alle“ Aussage verneint, so entsteht eine „es gibt“ Aussage und umgekehrt.

Lemma 4. *Sei A eine Aussage. Die Verneinung der Verneinung von A ist A selbst. In Formeln:*
$$\neg(\neg A) = A$$

Beweis. Die Aussage $\neg(\neg A)$ ist nach Definition genau dann wahr, wenn die Aussage $\neg A$ falsch ist. Die Aussage $\neg A$ hingegen ist nach Definition genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist. Also ist $\neg(\neg A)$ genau dann wahr, wenn A wahr ist und die Behauptung folgt. $\square$

Als nächstes wollen wir die Verknüpfung „und“ betrachten.

Definition 3. *Seien A und B Aussagen. Die Aussage $A \wedge B$, gesprochen A und B, ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.*

Die Verwendung von „und“ entspricht also dem üblichen Sprachgebrauch. Bei der mathematischen Verwendung von „oder“ ist dies anders:

Definition 4. *Seien A und B Aussagen. Die Aussage $A \vee B$, gesprochen A oder B, ist genau dann wahr, wenn mindestens(!) eine der Aussagen A und B wahr ist.*

Die bisher definierten Operationen hängen auf folgende Art und Weise zusammen:

Lemma 5. *Seien A und B Aussagen.*

1. *Die Aussage $A \wedge \neg A$ ist immer falsch.*
2. *Die Aussage $A \vee \neg A$ ist immer wahr.*
3. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$
4. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

Beweis.

1. Die Aussage $A \wedge \neg A$ ist nach Defition von $\wedge$ genau dann wahr, wenn sowohl A, als auch $\neg A$ what sind. Dies kann allerdings nicht eintreten, da A genau dann wahr ist, wenn $\neg A$ falsch ist.
2. Übungsaufgabe.
3. Die Aussage $\neg(A \wedge B)$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $A \wedge B$ falsch ist. Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann falsch, wenn mindestens eine der Aussagen A und B falsch ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Aussage $(\neg A) \vee (\neg B)$ wahr ist.
4. Übungsaufgabe.

$\square$

Aussagen sind für uns deshalb so wichtig, weil sie in Relation zueinander stehen können. So impliziert zum Beispiel die Aussage „x ist eine gerade natürliche Zahl“ das x eine natürliche Zahl ist. Folgende Definition macht dies präzise.

Definition 5. *Seien A und B Aussagen. Wir sagen, dass A B impliziert, geschrieben $A \implies B$, falls die Wahrheit von Aussage A die Wahrheit von Aussage B nach sich zieht. $A \implies B$ ist also die Aussage $\neg A \vee B$.*

Beispiele hierfür werden wir in den kommenden Tagen noch viele sehen. Wichtig ist es hierbei zu bemerken, dass $A \implies B$ keinerlei Aussage darüber trifft, ob $B \implies A$ gilt.

Beispiel. *Sei A die Aussage „Ich bin Angela Merkel“ und B die Aussage „Ich bin deutsch“. Dann impliziert A B, denn Frau Merkel ist deutsch. Umgekehrt impliziert B sicherlich nicht A, denn ich bin deutsch, aber ich bin nicht Frau Merkel.*

Weiterhin trifft, wie obiges Beispiel gezeigt hat $A \implies B$ auch keine Aussage darüber, ob die Aussage A wahr ist oder nicht.
Darüber hinaus ist häufig die Kontraposition einer Aussage nützlich. Dies gilt besonders für Beweise, wie wir morgen sehen werden.

Lemma 6. *Seien A und B Aussagen. Die Aussage $A \implies B$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $\neg B \implies \neg A$ gilt.*

Beweis. Wegen $A \implies B = \neg A \vee B$ folgt dies aus dem vorherigen Lemma. $\square$

1.3 Beweisarten 1

Eine kurze Erinnerung an letztes Mal:
Wir haben definiert, dass eine Aussage A ein Satz ist, der entweder wahr oder falsch ist, aber niemals beides. Wir haben gesehen, wie wir durch Negation und Verkettung aus Aussagen neue Aussagen konstruieren können. Insbesondere haben wir definiert, was es bedeutet für eine Aussage A eine Aussage B zu implizieren, nämlich dass die Wahrheit von A auch die Wahrheit von B nach sich zieht. Wir haben hierfür $A \implies B$ geschrieben. Wenn $B \implies A$ ebenfalls gilt, und das muss keineswegs so sein!, so sagen wir, dass die Aussagen A und B äquivalent sind und schreiben $A \iff B$.
Heute wollen wir uns mit den mathematischen Methoden auseinandersetzen, die uns erlauben zu prüfen ob eine Aussage wahr ist oder nicht. Die mathematische Erklärung, warum eine Aussage wahr ist, nennen wir Beweis. Sie wird Sie Ihr gesammtes Studium hindurch begleiten.
Ich möchte heute drei Beweistypen anhand einfacher Beispiele vorstellen. Es ist nicht immer ganz einfach zu entscheiden, wann welcher Typ am besten angewendet werden soll, aber mit der Zeit bekommt man hierfür ein gewisses Maß an Intuition. Diese wollen wir in den Übungen trainieren.

1.3.1 Direkter Beweis

Der direkte Beweis ist die geradlinigste Beweismethode. Um zu direkt zu beweisen, dass $A \implies B$, bricht man es auf in Schritte $A \implies A_1$, $A_1 \implies A_2$ usw bis man irgendwann $A_r \implies B$ zeigt. Jeder dieser Schritte sollte einfach zu verstehen oder sogar offensichtlich sein.
Man versteht anhand von Beispielen viel besser, was mit einem direkten Beweis gemeint ist, also folgen nun zwei solche Beispiele. Bevor wir sie diskutieren, möchte ich einige neue Begriffe einführen. Der wichtigste dieser Begriffe ist der Begriff einer Menge.

Definition 6.

- *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Elementen. Mit der Notation $m \in M$ meinen wir, dass m zu der Menge M gehört.*
- *Sei M eine Menge. Eine Zusammenfassung eines Teils der Elemente von M nennen wir Teilmenge.*
- *Seien A, B Teilmengen von M. Dann sind auch*

$$A \cup B = \{x \in M \big| x \in A \textit{ oder } x \in B\}$$

und

$$A \cap B = \{x \in M \big| x \in A \textit{ und } x \in B\}$$

Teilmengen von M. Wir nennen sie die Vereinigung, bzw. den Schnitt, von A und B.

- *Eine Menge heißt endlich, falls sie nur endlich viele Element enthält.*

Die genaue Definition einer Menge ist gar nicht so wichtig, unser intuitives Verständnis reicht meist völlig aus.

Beispiele. *1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ bilden eine Menge.*

2. Die reellen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{R}$.

3. Die Menge der ungeraden Zahlen $\{m \in \mathbb{N} \big| m = 2n + 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ bildet eine Teilmenge der natürlichen Zahlen.

4. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{m, -m \big| m \in \mathbb{N}\}$ bildet eine Teilmenge der reellen Zajlen.

5. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \big| p, q \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.

Satz 1. *Sei $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl. Dann ist auch m^2 ungerade.*

Beweis. Da m ungerade ist, gilt $m = 2n + 1$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt

$$m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

und dies ist ebenfalls ungerade. □

Hier nun also noch ein zweites Beispiel. Angenommen wir haben zwei endliche Menge, die Teilmengen ein und der selben Menge sind. Wie zählen wir dann die Elemente in ihrer Vereinigung? Haben Sie eine Idee? Der entscheidende Punkt ist, dass man darauf achtet, kein Element doppelt zu zählen, welches in beiden vorkommt.

Satz 2. *Sei M eine endliche Menge und seien A, B Teilmengen von M. Dann gilt*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

wobei $|A|$ die Anzahl der Element von A bezeichnet.

Beweis. Wenn wir alle Element aus A zählen und danach alle Element aus B zählen, so haben wir jedes Element aus $A \cup B$ mindestens ein Mal und höchstens zwei Mal gezählt. Die Elemente, die wir doppelt gezählt haben, sind genau diejenigen, die in $A \cap B$ liegen. Folglich gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

1.3.2 Beweis per Widerspruch

Angenommen, wir wollen $A \implies B$ zeigen. Für den Beweis per Widerspruch nehmen wir an, dass die Aussage B falsch ist und leiten nun mit logischen Argumenten eine Aussage her von der wir wissen, dass sie falsch ist, z.B. $1 = 0$ oder A ist falsch. Da B entweder wahr oder falsch ist, die Annahme es sei falsch, aber zu einem Widerspruch führt, muss B wahr sein.
Wieder gilt, dass dies anhand von Beispielen leichter einzusehen ist. Das berühmteste solche Beispiel ist das folgende:

Satz 3. *$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.*

Beweis. Wie angekündigt nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, d.h. dass es ganze Zahlen p und q gibt, so dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Da die ganzen Zahlen eine eindeutige Primfaktorzerlegung erlauben (bis auf Multiplikation mit -1), können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Nun ist

$$2 = (\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2},$$

also gilt $2q^2 = p^2$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müssen also p und q beide durch zwei teilbar sein im Widerspruch zu unserer Annahme, dass sie teilerfremd seien.
Somit folgt, dass etwas falsch sein muss und da unsere Argumentation es nicht war, bleibt nur die ursprüngliche Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sei. $\square$

Lassen Sie uns ein weiteres Beispiel betrachten.

Satz 4. *Es gibt keine positiven, natürlichen Zahlen x und y mit $x^2 - y^2 = 1$.*

Beweis. Angenommen es gäbe solche positiven, natürlichen Zahlen x und y. Dann gilt also $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 1$. Da $x+y$ und $x-y$ ganze Zahlen sind, gibt es zwei Fälle:

- $x + y = 1 = x - y$
- $x + y = -1 = x - y$

Wenn wir den ersten analysieren, so stellen wir fest, dass $2y = (x+y) - (x-y) = 0$, also $y = 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass y positiv sei.
Wenn wir den zweiten Fall analysieren, erhalten wir auf ähnliche Art und Weise (Übung!) $y = 0$, was wieder einen Widerspruch darstellt.
Insgesamt folgt also, dass positive, natürliche Zahlen x und y mit $x^2 - y^2 = 1$ nicht existieren können. $\square$

Obiger Beweis hat noch eine weitere Technik, die in Beweisen nützlich sein kann, deutlich gemacht, nämlich das unterscheiden von verschiedene Fällen.

1.3.3 Vollständige Induktion

Die dritte Beweistechnik, die ich heute vorstellen möchte, haben wir bereits am Montag gesehen. Es ist die vollständige Induktion. Diese funktioniert folgendermaßen: Angenommen, ich habe Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n und angenommen es gelten zwei Dinge:

1. $A(0)$ ist wahr.
2. Falls $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist automatisch $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn: $A(0)$ ist wahr, also ist $A(1)$ wahr. Wenn aber $A(1)$ wahr ist, so ist auch $A(2)$ wahr. Da $A(2)$ wahr ist, ist auch $A(3)$ wahr, usw...
Auch hierfür möchte ich zwei Beispiel angeben.

Satz 5. *Für alle natürlichen Zahlen n ist $6^n - 1$ durch 5 teilbar.*

Beweis. Wir wenden vollständige Induktion an auf die Aussage $A(n) =$ „$6^n - 1$ ist durch 5 teilbar“ an. Für $n = 0$ ist $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot 5$ durch fünf teilbar.
Nehmen wir nun an, dass $6^n - 1 = 5m$ für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist. Wir wollen zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ gilt, d.h. dass $6^{n+1} - 1$ ebenfall durch fünf teilbar ist. Es gilt:

$$6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 1 = 6 \cdot (5m + 1) - 1 = 30m + 6 - 1 = 5 \cdot (6m + 1),$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus unserer Annahme, dass $6^n - 1 = 5m$ folgt. Wie wir sehen, ist somit also auch $6^{n+1} - 1$ durch fünf teilbar. □

Satz 6. *Sei M eine endliche Menge. Dann besitzt M genau $2^{|M|}$ unterschiedliche Teilmengen.*

Beweis. Wir behandeln zunächst wieder den kleinstmöglichen Fall. In diesem Fall ist es die leere Menge $M = \emptyset$, welche null Elemente enthält. Diese besitzt dann natürlich auch genau $2^0 = 1$ Teilmengen, nämlich eben sich selbst.
Sei nun die Aussage für alle Mengen mit n Elementen wahr und sei M eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Sei $m \in M$ ein Element und sei M' die Menge aller Elemente aus M, welche nicht m sind. Dann hat M' n Elemente und nach Annahme also genau 2^n Teilmengen. Aus jeder Teilmenge von M' lässt sich auf zwei Arten und Weisen eine Teilmenge von M machen, nämlich indem man sie so lässt wie sie ist, oder indem man m hinzufügt, und diese Menge sind alle unterschiedlich. Weiterhin ist jede Teilmenge von M von dieser Form. Also gibt es

$$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Teilmengen von M und die Aussage folgt per vollständiger Induktion. □

1.4 Beweisarten 2

Nachdem wir gestern drei Beweismethoden, nämlich direkten Beweis, Beweis per Widerspruch und Beweis durch vollständige Induktion, behandelt haben, wollen wir heute anhand von Beispielen üben, wann man welche Methode anwenden kann.
Eine Frage an alle: Welche Zahl ist größer? n^n oder $n!$? Hierbei ist die Fakultät von n, geschrieben $n!$, induktiv definiert als $n! = n \cdot (n-1)!$ und $1! = 1 = 0!$. Es gilt also $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.
Unsere Intuition legt nahe, dass n^n größer ist, da wir hier n mal n aufmultiplizieren, wohingegen in $n!$ auch kleinere Zahlen als n als Faktoren auftreten. Das folgende Lemma macht dies präzise.

Lemma 7. *Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

1. $n! \leq n^n$
2. $2^{n-1} \leq n!$

Beweis. Diese Aussagen lassen sich gut mit der vollständigen Induktion beweisen.

1. Sicherlich gilt $0! = 1 \leq 1 = 0^0$. Angenommen es gilt nun also $n! \leq n^n$. Wenn wir beide Seiten mit $n+1$ multiplizieren erhalten wir $(n+1)! \leq n^n \cdot (n+1)$. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist allerdings sicherlich kleiner als $(n+1)^{n+1}$, denn $n < n+1$, also folgt die Behauptung per Induktion.

2. Da $\frac{1}{2} = 2^{0-1} \leq 1 = 0!$ folgt die Aussage für $n = 0$. Im Fall von $n = 1$ haben wir $2^0 = 1 \leq 1 = 1!$ und die Aussage ist ebenfalls wahr. Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $n \geq 2$ gilt und wollen sie für $n+1$ zeigen. Wir haben
$$\begin{aligned} 2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\ &\leq 2 \cdot n! \\ &\leq (n+1) \cdot n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$
und somit folgt die Behauptung. Hierbei nutzt die zweite Ungleichung die Tatsache, dass wir $n \geq 2$ annehmen.

□

Lemma 8. *Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Anordnung der Zahlen $1, \dots, n$ (zum Beispiel für $n = 7$ die Anordnung $7, 3, 4, 1, 6, 5, 2$). Falls n ungerade ist, so ist das Produkt $(x_1 - 1)(x_2 - 2) \dots (x_n - n)$ gerade.*

Beweis. Welche Beweisart schlagen Sie vor?
Auch wenn hier sehr prominent ein n vorkommt ist die vollständige Induktion nicht wirklich die beste Idee, denn es ist nicht so leicht eine Situation mit $n-1$ oder wohl eher $n-2$ zu erzeugen, auf die wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Zunächst probieren wir einfach ein wenig aus, um eine Beweisidee zu entwickeln. Dazu können wir das Beispiel aus der Aussage verwenden und einfach mal schauen, ob sie denn überhaupt stimmt:
$7 - 1 = 6$, $3 - 2 = 1$, $4 - 2 = 2$ und schon sind wir fertig, denn ein Produkt ist genau dann gerade, wenn mindestens einer der Faktoren gerade ist.
Können wir also für n ungerade zeigen, dass immer einer der Faktoren $x_i - i$ gerade ist? Falls ja, so sind wir fertig. Wann ist solch ein Faktor denn Gerade?
$x_i - i$ ist genau dann gerade, wenn x_i und i beide gerade oder beide ungerade sind. Kann es also für ungerades n passieren, dass wir eine Anordnung $x_1, \dots, x_n$ wählen können, so dass x_i genau dann gerade ist, wenn i ungerade ist? Hierfür müssen wir wissen, wie viele ungerade Zahlen es zwischen 1 und n für ungerades n gibt. Die Antwort ist leicht: $\frac{n-1}{2} + 1$, denn jede zweite Zahl ist gerade. Dementsprechend gibt es allerdings nur $\frac{n-1}{2}$ gerade Zahlen zwischen 1 und n. Da die beiden Zahlen $\frac{n-1}{2} + 1$ und $\frac{n-1}{2}$ unterschiedlich groß sind, können wir also nicht für jede ungerade Zahl i auch eine gerade Zahl als x_i wählen und somit ist das Produkt gerade. □

Aus der Schule kennen Sie alle schon Polynome, zum Beispiel dieses hier: $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3$. Häufig möchte man etwas über Nullstellen solcher Polynome wissen, aber das ist oftmals schwierig. Von daher ist es manchmal auch schon hilfreich einschränken zu können, wo diese liegen.

Lemma 9. *Alle Nullstellen von $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3$ sind kleiner als zwei.*

Beweis. Welche Beweismethode schlagen Sie vor? Setzen wir doch spaßeshalber einfach mal $x = 2$ in die Gleichung ein:

$$2^5 - 2 \cdot 2^3 - 3 = 32 - 16 - 3 = 13$$

Und was geschieht, wenn wir mal $x = 3$ einsetzen?

$$3^5 - 2 \cdot 3^3 - 3 = 243 - 54 - 3 = 186 > 0$$

Könnte es vielleicht sein, dass unser Polynom $f(x)$ für immer größere Werte von $x \geq 2$ immer größere Werte $f(x)$ produziert (man sagt dann auch, dass

f auf dem Intervall $[2, \infty)$ monoton steigend ist). Wenn dies so wäre, könnte es keine Nullstelle mit $x \geq 2$ geben, denn wir wissen ja bereits, dass $f(2) > 0$ gilt.
Wie Sie vermutlich aus der Schule schon wissen, kann man das Monotonieverhalten einer Funktion anhand ihrer Ableitung überprüfen. Wir werden dies übernächste Woche mathematisch rigoros beweisen, aber für heute können wir dies gerne schon einmal annehmen. Die Ableitung von f lautet

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2.$$

Wir müssen also zeigen, dass für alle $x \geq 2$ schon $f'(x) \geq 0$ gilt. Sehen Sie, wie man dies beweisen kann? Hier biete sich möglicherweise einfach ein direkter Beweis an: Zunächst teilen wir durch x^2. Da dies positiv ist, dreht sich auch kein Ungleichheitszeichen um und wir müssen also

$$5x^2 \geq 6$$

für alle $x \geq 2$ zeigen. Nun folgt aus $a \geq b$ für positive Zahlen a und b auch $a^2 \geq b^2$. Somit gilt für jedes $x \geq 2$

$$5x^2 \geq 5 \cdot 2^2 = 20 > 0$$

und die Behauptung folgt. □

Wie wir gestern bereits gesehen haben, ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl, obwohl 2 eine rationale Zahl ist. Wie sieht es denn mit der umgekehrten Aussage aus: Falls x irrational ist, ist dann auch $\sqrt{x}$ irrational? Was meinen Sie? Wir machen eine Umfrage.

Lemma 10. *Falls x irrational ist, so auch $\sqrt{x}$.*

Beweis. Wie beweisen wir nun diese Aussage? Ich denke, dass sich ein Widerspruchsbeweis anbietet, da die Eigenschaft irrational zu sein, durch eine Negation (nämlich „nicht rational“) definiert ist. Wir nehmen also an, dass $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ für ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ und wollen hieraus einen Widerspruch konstruieren. Hat jemand eine Idee, wogegen dieser Widerspruch sein könnte?
Ja, ich denke auch, dass wir es mit der Aussage „x ist irrational“ versuchen sollten. Also:

$$\sqrt{x} = \frac{p}{q} \implies x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Da p^2 und q^2 rationale Zahlen sind, haben wir den gewünschten Widerspruch gefunden. Somit muss also gelten, dass $\sqrt{x}$ irrational ist. □

1.5 Eindeutige Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen

Nachdem am Mittwoch nicht alle Hörer die eindeutige Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen kannten, möchten wir diese heute diskutieren. Unser Hauptresultat soll das folgende Theorem sein:

Satz 7. *Sei n eine positive natürliche Zahl. Dann gibt es (bis auf Vertauschung der Faktoren) eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass $n = p_1 \cdot \ldots p_k$.*

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Die Existenz der primfaktorzerlegung lässt sich sehr einfach beweisen und wird deshalb zuerst behandelt.

Lemma 11. *Sei n eine positive natürliche Zahl. Dann gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass $n = p_1 \cdot \ldots p_k$.*

Beweis. Wie wir gestern diskutiert haben, setzen wir das leere Produkt als Eins. Somit besitzt die Eins eine Primfaktorzerlegung, nämlich in gar keine Faktoren. Wir brauchen noch eine kurze Vorüberlegung: Faktoren einer natürlichen Zahl sind immer kleiner oder gleich als diese Zahl. Dies ist klar, da das Multiplizieren mit positiven Zahlen Ungleichung erhält.
Sei nun $n \geq 2$. Es können zwei Fälle auftreten:
Entweder n besitzt keine Faktoren außer 1 und sich selbst. In diesem Fall ist n prim und wir haben nichts zu zeigen.
Im anderen Fall besitzt n einen Faktor m mit $1 < a < n$, es gilt also $n = a \cdot b$ mit $1 < a, b < n$. Wenn wir die Induktionsvoraussetzung auf a und b anwenden, sehen wir, dass diese in ein Produkt von Primzahlen zerfallen und das Gleiche gilt somit auch für n. $\square$

Für den Eindeutigkeitsaspekt benötigen wir das Teilen mit Rest.

Satz 8 (Teilen mit Rest)**.** *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen a und b mit $b < m$ und $n = am + b$.*

Beweis. Vermutlich schon lange bekannt. Wir werden übernächste Woche im Rahmen der Polynomdivision eine ähnliche Aussage beweisen. $\square$

Hieraus ergibt sich eine Methode, um den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen zu berechnen. Seien $m < n \in \mathbb{N}$. Die wiederholte Division mit Rest bricht dann nach endlich vielen Schritten und aufgehender

Division ab:

$$\begin{aligned} n &= a_1 m + b_1 \\ m &= a_2 b_1 + b_2 \\ b_1 &= a_3 b_2 + b_3 \\ &\vdots \\ b_{k-2} &= a_k b_{k-1} \end{aligned}$$

mit $m > b_1 > b_2 > b_3 > \dots$.

Satz 9. *b_{k-1} wie oben berechnet ist der größte gemeinsame Teiler von n und m.*

Beweis. b_{k-1} ist ein Teiler von b_{k-2}. Wegen $b_{k-3} = a_{k-1}b_{k-2} + b_{k-1}$ ist b_{k-1} auch ein Teiler von b_{k-3}. Mit absteigender Induktion teilt b_{k-1} somit alle b_l und deshalb auch $m = a_2 b_1 + b_2$. Schließlich teilt es dann aber auch $n = a_1 m + b_1$.
Wenn umgekehrt x ein Teiler von n und m ist, so teilt auch $b_1 = n - a_1 m$ und $b_2 = m - a_2 b_1$. Induktiv teilt x alle b_i und somit ist b_{k-1} der größte gemeinsame Teiler von n und m. □

Korollar 1. *Seien $m < n \in \mathbb{N}$ und sei x ihr größter gemeinsamer Teiler. Dann gibt es ganze(!) Zahlen a und b mit $x = an + bm$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus obiger Methode, um den größten gemeinsamen Teiler zu berechnen. □

Lemma 12. *Seien x und y natürliche Zahlen und p eine Primzahl. Angenommen p ist ein Teiler von $x \cdot y$. Dann gilt bereits, dass p einer Teiler von x oder ein Teiler von y ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass p x nicht teilt. Es sind also p und x teilerfremd, da p eine Primzahl ist, d.h. ihr größter gemeinsamer Teiler ist 1. Nach obigem Korollar gibt es also ganze Zahlen a und b mit $1 = a \cdot p + b \cdot x$. Wenn wir diese Gleichung mit y multiplieren, erhalten wir

$$y = apy + bxy.$$

Da p nach Annahme das Produkt $x \cdot y$ teilt, folgt somit, dass p schon y teilt. □

Als Korollar folgt auch die gewünschte Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Korollar 2. *Sei n eine positive natürliche Zahl. Dann gibt es (bis auf Vertauschung der Faktoren) eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass $n = p_1 \cdot \ldots p_k$.*

Beweis. Die Existenz der Primfaktorzerlegung haben wir uns vorhin bereits überlegt. Seien nun $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot \ldots q_l$ zwei Möglichkeiten eine natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen zu schreiben. Aus dem obigen Lemma folgt dann schon, dass es ein i gibt, so dass p_1 q_i teilt. Da aber q_i auch prim ist, folgt $p_1 = q_i$. Nun können wir also durch p_1 teilen und induktiv folgt die Eindeutigkeit, wenn man nutzt, dass 1 sich nie als nicht-triviales Produkt von Primzahlen schreiben lässt. $\square$

2 Woche 2: Anwendungsbeispiele aus Kombinatorik und Analysis

2.1 Urnenmodelle 1

Nachdem wir letze Woche drei Beweismethoden, nämlich direkten Beweis, Beweis per Widerspruch und Beweis durch vollständige Induktion, behandelt haben, wollen wir heute und morgen etwas Kombinatorik diskutieren. Beweise werden natürlich weiterhin eine wichtige Rolle spielen, da wir sicher sein wollen, dass unsere Behauptungen auch wahr sind.

Beispiel. *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit beim bekannten Lotto „6 aus 49“ den Hauptgewinn zu erzielen?*

Mit dieser und ähnlichen Fragen wollen wir uns in den kommenden beiden Tagen befassen. Beim Lotto „6 aus 49“ wählt man aus 49 Zahlen 6 unterschiedliche aus. Das mathematische Modell hierfür nennt sich Urnenmodell und kommt in verschiedenen Varianten. Wir benötigen hierfür eine Menge M mit n Elementen, zum Beispiel die Mengen $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Wir fragen uns nun, wie viele Möglichkeiten es gibt k Elemente aus dieser Menge zu ziehen. Hierbei spielt eine Rolle, ob wir die Elemente zurücklegen, wie dies beim Lotto nicht der Fall ist, und ob wir die Reihenfolge des Ziehens beachten oder nicht, wie dies beim Lotto ebenfalls nicht der Fall ist. Jedes dieser vier Modelle wollen wir einzeln analysieren.

2.1.1 Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Wir benötigen folgende Definition.

Definition 7. *Seien n und d zwei natürliche Zahlen.*

- *Die Fakultät von n, geschrieben $n!$, ist induktiv definiert als $n! = n \cdot (n-1)!$ und $1! = 1 = 0!$. Es gilt also $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.*
- *Der Binomialkoeffizient n über d, geschrieben $\binom{n}{d}$ ist definiert als*

$$\binom{n}{d} = \frac{n!}{d! \cdot (n-d)!}.$$

Satz 10. *Es gibt $\frac{n!}{(n-d)!}$ viele Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge d Elemente unter Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, falls $d \leq n$. Andernfalls gibt es keine Möglichkeiten.*

Beweis. Wir beweisen dies per Induktion über d. Da es genau eine Möglichkeit gibt kein Element aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, folgt die Behauptung für $d = 0$. Da es genau $n = \frac{n!}{(n-1)!}$ Möglichkeiten gibt, ein Element auszuwählen, folgt sie auch für $d = 1$ für diejenigen, denen der Fall $d = 0$ nicht ganz geheuer ist.
Sei nun die Behauptung für d gezeigt und wir nehmen an, dass $d + 1 \leq n$. Wie wir uns schon überlegt haben, gibt es n Möglichkeiten ein Element auszuwählen. Die resultierende Menge hat nun noch $n - 1$ Elemente, da wir nicht zurücklegen. Aus dieser müssen wir noch d Elemente auswählen. Da wir annehmen, dass dieser Fall bereits wahr ist, gibt es hierfür also $\frac{(n-1)!}{(n-d-1)!}$ viele Möglichkeiten. Multiplizieren wir dies mit den n Möglichkeiten aus der Wahl des ersten Elementes ergibt sich also $\frac{n!}{(n-d-1)!}$ und dies entspricht genau der Behauptung. □

2.1.2 Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Nun möchten wir das Ziehen ohne Zurücklegen, aber ohne Beachtung der Reihenfolge diskutieren. Mit anderen Worten möchten wir wissen, wie viele d-elemetige Teilmengen eine n-elementige Menge besitzt.

Satz 11. *Es gibt $\binom{n}{d}$ viele Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge d Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, falls $d \leq n$. Andernfalls gibt es keine Möglichkeiten.*

Beweis. Aus dem vorherigen Satz wissen wir, dass wir unter Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-d)!}$ Möglichkeiten haben. Es gilt also noch die Frage zu beantworten, wie viele Möglichkeiten wir haben die gleichen d Elemente auszuwählen und dann $\frac{n!}{(n-d)!}$ durch diese Anzahl zu teilen.
Wir wollen also aus einer d-elementigen Menge d Elemente wählen, die Reihenfolge beachten und nicht zurücklegen, sind also wieder in der Situation des obigen Satzes und erhalten $d!$ als Antwort.
Hiermit ergibt sich für die Anzahl an Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge d Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen

$$\frac{n!}{d!(n-d)!} = \binom{n}{d}.$$

□

Korollar 3. *Seien $d \leq n$ natürliche Zahlen. Die Anzahl an d-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{d}$.*

Beweis. Eine d-elementige Teilmenge besteht aus der Wahl von d Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge. Also folgt das Korollar aus obigem Satz. □

Da wir nun wissen, dass Binomialkoeffizienten wichtig sind, diskutieren wir nun noch einige nützliche Rechenregeln für sie.

Lemma 13. *Seien $d \leq n$ natürliche Zahlen. Dann gilt:*

1. $\binom{n}{d} = \binom{n}{n-d}$
2. $\binom{n+1}{d+1} = \binom{n}{d} + \binom{n}{d+1}$
3. $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

Beweis. Welche Beweismethode schlagen Sie vor? Ich finde, hier bietet es sich an die Methode des direkten Beweises oder die der vollständigen Induktion zu wählen.

1. Es ist
$$\binom{n}{d} = \frac{n!}{d!(n-d)!} = \frac{n!}{(n-d)!d!} = \binom{n}{n-d},$$
denn es gilt $d = n - (n - d)$.

2. Bei solchen Aussagen ist es häufig nützlich mit der „komplizierten“ Seite der Gleichung zu beginnen.
$$\begin{aligned}\binom{n}{d} + \binom{n}{d+1} &= \frac{n!}{d!(n-d)!} + \frac{n!}{(d+1)!(n-d-1)!} \\ &= \frac{n!(d+1) + n!(n-d)}{(d+1)!(n-d)!} \\ &= \frac{n!(d+1+n-d)}{(d+1)!(n-d)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(d+1)!(n-d)!} \\ &= \binom{n+1}{d+1}\end{aligned}$$

3. Aus einem vorherigen Lemma wissen wir bereits, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ genau 2^n Teilmengen besitzt. Andererseites beschreibt $\binom{n}{d}$ die Anzahl an d-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ und somit folgt die Behauptung.

□

Zum Abschluss möchten wir noch das Lotto „6 aus 49“ diskutieren.

Beispiel. *Hierbei handelt es sich um das Ziehen von sechs Zahlen aus der Menge* $\{1, 2, \ldots, 49\}$ *ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Nach dem vorherigen Satz ergben sich dafür also*

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49!}{6!43!} \\ &= \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{6!} \\ &= 13983816\end{aligned}$$

viele Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit sechs Richtige vorherzusagen liegt also bei

$$\frac{1}{13983816} \approx 0.0000000715 \textit{ Prozent.}$$

2.2 Urnenmodelle 2

Gestern haben wir das Ziehen von d Elementen aus einer n-elementigen Menge ohne Zurücklegen besprochen. Wir haben gesehen, dass es mit Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-d)!}$ viele Möglichkeiten und ohne Beachtung der Reihenfolge $\binom{n}{d} := \frac{n!}{d!(n-d)!}$ viele Möglichkeiten gibt. Heute wollen wir das Ziehen mit Zurücklegen betrachten.

2.2.1 Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Nun wenden wir uns also dem Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge zu. Ein klassisches Beispiel hierfür ist ein Zahlenschloss am Fahrrad. Angenommen es hat vier Stellen, wie viele verschiedene Möglichkeiten eines „Passwortes“ gibt es dann?

Satz 12. *Es gibt n^d Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge d Elemente mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.*

Beweis. Wir wollen den Satz per vollständiger Induktion über d beweisen. Im Fall $d = 0$ haben wir genau eine Wahl und im Fall $d = 1$ genau n Stück. Angenommen wir haben nun die erste Wahl getroffen. Es bleiben also noch $d - 1$ Elemente aus einer n-elementigen Menge (wegen des Zurücklegens) zu ziehen. Nach dem Induktionsannahme gibt es hierfür n^{d-1} Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $n \cdot n^{d-1} = n^d$ Möglichkeiten und die Behauptung ist gezeigt. □

2.2.2 Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Zum Abschluss unserer Diskussion der sogenannten Urnenmodelle betrachten wir noch den Fall des Ziehens mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Satz 13. *Es gibt $\binom{n+d-1}{n-1}$ Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge d Elemente mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.*

Beweis. Wir numerieren die Elemente aus unserer n-elementigen Menge mit $a_1, \ldots, a_n$. Sei $M = \{1, 2, 3, \ldots, n+d-1\}$. Für $1 \leq i \leq n-1$ sei b_i die Anzahl der Male, die a_i gezogen wurde. Wir definieren nun induktiv $c_1 = b_1 + 1$ und für $i \geq 2$ sei $c_i = c_{i-1} + b_i + 1$. Dann gilt $c_i > c_{i-1}$ für alle i. Da die Summe aller b_j gerade d ist, gilt $c_i \leq n+d-1$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und somit liefert $\{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ eine $n-1$-elementige Teilmenge von M.
Sei umgekehrt $\{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ eine $n-1$-elementige Teilmenge von M und

sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$. Dann liefert uns $b_1 = c_1 - 1$, $b_2 = c_2 - c_1 - 1$, usw bis $b_n = n + d - 1 - c_{n-1}$ n natürliche Zahlen, deren Summe genau d ergibt. Diese beiden Prozesse sind einander entgegengesetzt. Mit anderen Worten gibt es also genau so viele Möglichkeiten d Elementen aus einer n-elementigen Menge mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen, wie es $n-1$-elementige Teilmengen von M gibt.
Letzters Problem haben wir allerdings schon gestern gelöst und wissen, dass es hierfür genau $\binom{n+d-1}{n-1}$ Möglichkeiten gibt. □

Zum Abschluss des Teils über Urnenmodelle wollen wir uns noch ein Beispiel anschauen.

Beispiel (Wege im Gitter). *Angeommen wir haben ein $n \times m$ Gitter, d.h. wir schauen uns alle Paare natürlicher Zahlen (i, j) mit $i \leq n$ und $j \leq m$ an und stellen uns diese als Punkte in einem Rechteck vor. Ein Schritt in diesem Gitte verbindet zwei Punkte (i, j) und (k, l) genau dann, wenn $i + j = k + l \pm 1$, d.h. genau dann, wenn sie in unserem vorgestellten Rechteck nebeneinander liegen. Ein Weg in diesem Gitter ist eine Abfolge von Schritten und ein kürzester Weg von einem Punkt (i, j) zu einem Punkt (k, l) ist ein Weg, so dass für jeden anderen Weg von (i, j) nach (k, l) gilt, dass dieser mindestens aus genauso vielen Schritten besteht.*
Frage: Wie viele kürzeste Wege gibt es von $(0, m)$ nach $(n, 0)$?
Antwort: In jedem Fall müssen wir n Schritte nach unten und m Schritte nach rechts gehen. Da es solche Wege gibt, ist die Länge der kürzesten Wege also $n + m$ Schritte. Hierbei können wir frei wählen, in welcher Reihenfolge wir nach unten, bzw. nach rechts gehen. Wenn wir allerdings die Position unserer m Schritte nach rechts gewählt haben, ist festgelegt, wann wir unsere n Schritte nach unten machen. Insgesamt sehen wir also, dass es sich um Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge handelt.
Somit gibt es also $\binom{n+m}{m}$ mögliche kürzeste Wege.

Zum Abschluss der heutigen Vorlesung wollen wir noch den binomischen Lehrsatz diskutieren. Hierfür möchte ich zunächst an einige Eigenschaften des Binomialkoeffizienten, die wir gestern hergeleitet haben, erinnern.

Lemma 14. *Seien $d \leq n$ natürliche Zahlen. Dann gilt:*

1. $\binom{n}{d} = \binom{n}{n-d}$
2. $\binom{n+1}{d+1} = \binom{n}{d} + \binom{n}{d+1}$
3. $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

Jetzt kommen wir dann zum binomischen Lehrsatz.

Satz 14. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. *Allgemeiner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Wie würden Sie diese Aussagen beweisen? Den Fall $n = 2$ kann man sehr einfach direkt beweisen, der Fall für allgemeines n folgt dann daraus per vollständiger Induktion.

Beweis. 1. Wir rechnen unter Verwendung des Distributivgesetzes

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Da nun $ab = ba$ folgt somit die Behauptung.

2. Wir verwenden, wie schon angekündigt, die vollständige Induktion. Die Fälle $n \in \{0, 1, 2\}$ sind klar und/oder wurden bereits bewiesen. Sei nun also $n > 2$ gegeben. Dann ist

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b).$$

Auf den ersten Faktor wenden wir nun die Induktionsannahme an und erhalten

$$(a+b)^n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-1-i} b^i \right) \cdot (a+b).$$

Ausmultiplizieren des Produktes und das Distributivgesetz liefern nun

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-1-i} b^{i+1}$$

Nun fassen wir noch die Vorfaktoren von $a^{n-i} b^i$ zusammen. Falls $i \notin \{0, n\}$ so ist dieser Vorfaktor aufgrund des vorigen Lemmas

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$

In den Sonderfällen $i = 0$ oder $i = n$ ist der Vorfaktor $1 = \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$, da der Summand dann nur in einer der beiden Summen auftaucht.

□

Zum Abschluss noch eine nette Beobachtung: Man kann nämlich Teil drei des obigen Lemmas auch aus dem binomischen Lehrsatz folgern, indem man $a = b = 1$ setzt. In den Übungen werden Sie sehen, dass das Einsetzen von anderen Werten noch zu weiteren kombinatorischen Formeln führt.

Korollar 4. *Es gilt* $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

2.3 Erinnerung: Kurvendiskussion

Nachdem wir bisher vor allem elementare Aussagen und Aufgaben betrachtet haben, möchten wir nun komplizierte Problem, möglicherweise deutlich näher am „echten Leben“ studieren. Hierfür benötigen wir auch fortgeschrittenere Methoden. Die kommenden Tage werden wir diese auf intuitive und aus dem Schulunterricht bekannte Art und Weise verwenden und sie dann nächste und übernächste Woche auch mathematisch präzise diskutieren und insbesondere alle die von uns nun verwendeten Aussagen auch beweisen. Auch Sinus und Kosinus, die wir im Laufe der Woche schon verwenden werden, werden zum Abschluss des Vorkurses noch ausführlich diskutiert.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann kann man f häufig (aber nicht immer!) eine weitere Funktion f', die erste Ableitung von f zuordnen, die ein Maß für die Steigung von f darstellt. Dieses Verfahren erfüllt folgende Regeln:

1. $(f + g)' = f' + g'$ für jede weitere Funktion g.
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ für jede weitere Funktion g. „Produktregel“
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ für jede weitere Funktion g. „Quotientenregel“
4. $\big(f(g)\big)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ für jede weitere Funktion g. „Kettenregel“
5. $(a \cdot f)' = a \cdot f'$ für jede reelle Zahl a.
6. Für $f(x) = x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.
7. Für $f(x) = \exp(x)$ gilt $f'(x) = \exp(x)$.
8. Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.
9. Für $f(x) = \cos(x)$ gilt $f'(x) = -\sin(x)$.

Unter Zuhilfenahme der ersten und der zweiten (man leitet nun die Ableitung nochmal ab) Ableitung, kann man sich eine gute Idee verschaffen, wie der Graph von f aussieht. Diese, Ihnen aus der Schule schon bekannte, Methode nennt sich Kurvendiskussion und ist im Folgenden nochmal für Sie zusammengefasst:

Nullstellen Zunächst versuchen wir alle Nullstellen der Funktion f zu bestimmen. Hierbei kann z.B. die p-q-Formel hilfreich sein.

Symmetrie Wir untersuchen, ob die Funktion achsensymmetrisch (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x) oder punktsymmetrisch (d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) oder keines von beiden ist.

Monotonie Wir untersuchen in welchen Bereichen die Funktion f ansteigt oder abfällt. Dies geschieht unter Verwendung der ersten Ableitung: $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ impliziert, dass f auf (a, b) wächst, während $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ impliziert, dass f auf (a, b) fällt.

Verhalten im Unendlichen Hier untersuchen wir, was geschieht, wenn man für x sehr große oder sehr kleine (im Sinne von negativen Zahlen) Werte einsetzt.

Extremwerte Hier untersuchen wir die Funktion auf Minima und Maxima. Für das Vorliegen eines Minimums oder Maximums im Punkt x muss gelten $f'(x) = 0$. Dies ist aber nicht ausreichend. Gilt hingegen zusätzlich $f''(x) > 0$, so liegt ein (lokales) Minimum vor. Gilt zusätzlich $f''(x) < 0$, so liegt ein (lokales) Maximum vor.

Konvexität Hier untersuchen wir, ob der Graph der Funktion oberhalb oder unterhalb der Geraden, die zwei Funktionswerte verbindet liegt. Im ersten Fall sagt man, die Funktion sei konkav, im zweiten Fall sagt man sie sei konvex. Konvexität auf (a, b) tritt ein, falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Konkavität auf (a, b) tritt ein, falls $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Lassen Sie uns nun anhand dieser Methode den Graph der uns allen wohlbekannten Funktion $f(x) = x^2$ einmal skizzieren.

Beispiel. *Sei $f(x) = x^2$. Nach obigen Rechenregeln gilt dann $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$.*

Nullstellen *Es ist $f(x)$ genau dann Null, wenn x ebenfalls Null ist.*

Symmetrie *Es gilt $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, also ist f symmetrisch zur y-Achse.*

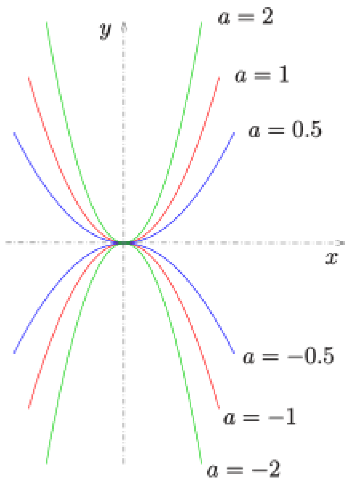
Monotonie *Die Ableitung $f'(x)$ ist auf $(0, \infty)$ größer Null und auf $(-\infty, 0)$ kleiner Null. Also steigt die Funktion f auf $(0, \infty)$ an, während sie auf $(-\infty, 0)$ abfällt. (Dies folgt natürlich auch aus der Achsensymmetrie)*

Verhalten im Unendlichen *Die Funktion $f(x) = x^2$ wird beliebig groß.*

Extremwerte *Die erste Ableitung hat genau in der Null eine Nullstelle. Die zweite Ableitung ist an dieser Stelle positiv, also liegt ein lokales Minimum vor. Aufgrund des Monotonieverhaltens sehen wir sogar, dass es sich um das globale Minimum handelt.*

Konvexität *Die zweite Ableitung ist konstant und positiv, also ist die Funktion konvex.*

Insgesamt ergibt sich als Graph der Funktion folgendes uns allen wohlbekanntes Bild.



Als zweites Beispiel für heute wollen wir den Schwierigkeitsgrad ein wenig steigern.

Beispiel. *Sei nun* $f(x) = \sin(x)^2$*. Zunächst müssen wir die ersten beiden Ableitungen von* f *bestimmen. Weiß jemand, wie dies geht?*
Unter Verwendung der Kettenregel mit $g(x) = \sin(x)$ *und* $h(x) = x^2$*, sieht man* $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$*. Wenn man nun die Produktregel verwendet, kann man auch die zweite Ableitung ausrechnen und es ergibt sich* $f''(x) = 2\big(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\big)$*.*

Nullstellen *Es ist* $f(x)$ *genau dann Null, wenn* $\sin(x)$ *Null ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn* $x = n\pi$ *für eine ganze Zahl* n*.*

Symmetrie *Zunächst bemerken wir die Periodizität: Es gilt* $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ *und somit ist* f π*-periodisch, d.h.* $f(x + \pi) = f(x)$ *für alle reellen Zahlen* x*. Desweiteren gilt* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *und somit ist* f *ebenfalls achsensymmetrisch. Aus Periodizitätsgründen beschränken wir uns im Folgenden also auf das Intervall* $[0, \pi]$*.*

Monotonie *Zunächst erinnern wir uns daran, dass der Sinus auf* $[0, \pi]$ *nur Werte* ≥ 0 *annimmt und der Kosinus auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *dies ebenfalls tut. Also ist die Ableitung* f' *auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *ebenfalls* ≥ 0 *und somit wächst* f *auf diesem Intervall. Da der Kosinus auf* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ *nur Werte* ≤ 0 *annimmt, fällt* f *auf diesem Intervall.*

Verhalten im Unendlichen *Die Funktion f nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an.*

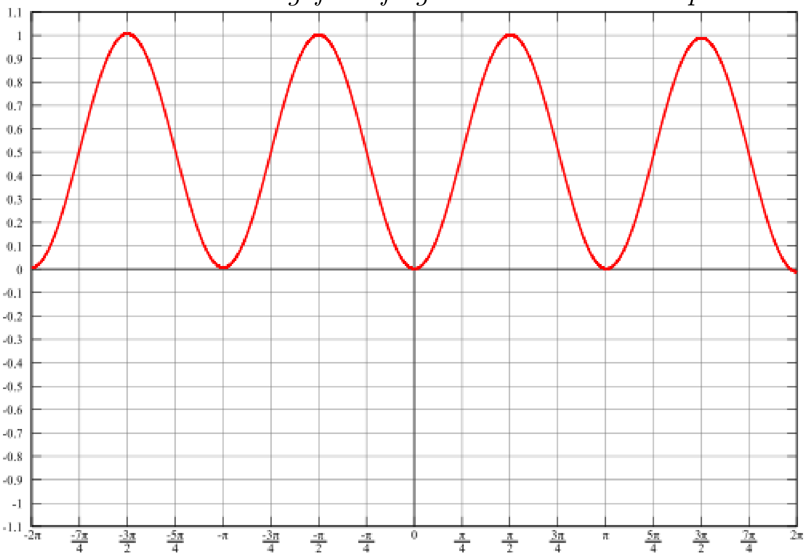
Extremwerte *Die erste Ableitung von f ist genau dann Null, wenn Sinus oder Kosinus Null sind. Im Intervall $[0, \pi]$ ist dies genau für $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ der Fall. Da der Sinus bei diesen Werten entweder 0 oder 1 ist, handelt es sich automatisch um Minima, bzw. Maxima.*

Konvexität *Wir müssen prüfen für welche $x \in [0, \pi]$*

$$\cos(x)^2 \geq \sin(x)^2$$

gilt. Es stellt sich raus, dass diese Ungleichung für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ und $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ gilt. Dies werden wir übernächste Woche direkt einsehen können, wenn wir uns nochmal ausführlich mit den trigonometrischen Funktionen befassen.

Wir erhalten also ungefähr folgendes Bild des Graphen von f:



2.4 Extremwerte 1

Gestern haben wir uns an die Kurvendiskussion, wie sie in der Schule durchgeführt wird, erinnert. Insbesondere ging es dabei um Minima und Maxima von Funktionen und den Zusammenhang mit -vor allem- der ersten Ableitung. Heute wollen wir diese Techniken benutzen, um bestimmte Extremwertaufgaben zu lösen.

Beispiel. *Sei r eine positive reelle Zahl. Welches Rechteck mit Umfang r hat den größten Flächeninhalt?*

Was meinen Sie?

Lemma 15. *Seien p und q die Seitenlängen eines Rechtecks mit Umfang r. Dann wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal unter allen solchen Rechtecken, falls $p = q$. Mit anderen Worten maximiert das Quadrat den Flächeninhalt.*

Beweis. Wir müssen die Antwort noch gar nicht kennen, um die Fragestellung bearbeiten und dann schließlich auch beantworten zu können. Entscheidend ist zunächst, dass wir uns eine oder mehrere Funktionen überlegen, die unser Problem modellieren. Dann versuchen wir in einem zweiten Schritt die Extremwerte dieser Funktion zu finden.
Angewendet auf unser konkretes Problem mit dem Rechteck sieht das wie folgt aus:

- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen p und q ist gegeben als $p \cdot q$. Andererseits haben wir den Umfang vorgegeben, d.h. wir wissen $2(p + q) = r$. Wir können nun nach q auflösen und erhalten $q = \frac{r}{2} - p$. Dies setzen wir in obige Flächeninhaltsformel ein und bekommen $p \cdot \left(\frac{r}{2} - p\right)$. Dies ist eine Funktion in p und wir müssen sie auf $[0, \frac{r}{2}]$ maximieren.

- Die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(p) = -p^2 + \frac{r}{2}p$ sind gegeben durch $f'(p) = -2p + \frac{r}{2}$ und $f''(p) = -2$. Da die zweite Ableitung konstant negativ ist, wird also jede Nullstelle der ersten Ableitung uns ein Maximum von f liefern. Die erste Ableitung besitzt genau eine Nullstelle, nämlich bei $p = \frac{r}{4}$ und dies bedeutet (wegen $q = \frac{r}{2} - p = \frac{r}{4} = p$) genau wie vorhergesagt, dass unser Rechteck tatsächlich ein Quadrat ist.

□

Als nächstes wollen wir eine ähnliche, aber doch etwas andere Fragestellung diskutieren.

Beispiel. *Aus einem Baumstamm mit einem kreisförmigen Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gefertigt werden und zwar so, dass möglichst wenig Abfall entsteht. Welche Seitenlängen müssen für das Rechteck (in Abhängigkeit des Durchmessers d) gewählt werden?*

Lassen Sie uns zunächst kurz diskutieren, was eigentlich gezeigt werden muss: Wonach ist gesucht? Und wie berechnet man den Abfall?
Wir gehen wieder nach dem Muster der letzten Diskussion vor.

- Wir müssen also den Flächeninhalt des Rechtecks maximieren. Dann wird auch automatisch der Abfall (d.h. der Rest) minimiert. Wenn die Seitenlängen des Rechtecks p und q sind, so hat es wie oben den Flächeninhalt $p \cdot q$. Dies sieht zunächst nach einer Funktion aus, die von zwei Variablen abhängt. Sieht jemand, warum das nicht der Fall ist?
  Wir müssen auch noch einbauen, dass unser Rechteck in einem Kreis liegen soll.

Lemma 16. *Für Seitenlängen $p, q \leq d$ liegt das Rechteck (dessen Mittelpunkt auch der Mittelpunkt des Kreises ist) genau dann vollständig im Kreis, wenn $d^2 \geq p^2 + q^2$.*

Beweis. Mit dem Satz von Pythagoras können wir ausrechnen, wie groß der Abstand eines Punktes auf dem Rechteck vom Mittelpunkt ist. Der maximale Abstand wird hierbei auf den Eckpunkten erreicht und somit genügt es diese zu betrachten. Hier ist der Abstand dann durch $\frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$ gegeben und die soll kleiner oder gleich $\frac{d^2}{4}$ sein. Wenn man diese Berechnungen mit 4 multipliziert, folgt die Behauptung. $\square$

Es ist anschaulich auch klar, dass ein Rechteck, um überhaupt die Chance zu haben, den größtmöglichen Flächeninhalt zu besitzen, schon seine Eckpunkte auf dem Rand haben muss. Mit anderen Worten haben wir auch noch die zweite Gleichung $d^2 = p^2 + q^2$ und somit $p = \sqrt{d^2 - q^2}$. Wenn wir dies in die Flächengleichung einsetzen, bekommen wir $f(q) = q \cdot \sqrt{d^2 - q^2}$ und diese Funktion müssen wir auf dem Intervall $(0, d)$ maximieren.

Lemma 17. *Die Funktion $f(q) = q \cdot \sqrt{d^2 - q^2}$ hat bei $\frac{d}{\sqrt{2}}$ ihr einziges Maximum auf $(0, d)$.*

Mit anderen Worten ist auch dieses Mal das gesuchte Rechteck ein Quadrat.

Beweis. Man kann die Ableitung von f natürlich direkt berechnen, wenn man die Ableitung der Wurzelfunktion und die Produktregel verwendet. Aber $f \cdot f(q) = q^2(d^2 - q^2)$ enthält keine Wurzeln mehr und über $(f \cdot f)' = 2f \cdot f'$ erhalten wir so auch die Ableitung von f. Dann ist also

$$f'(q) = \frac{-4q^2 + 2d^2}{\sqrt{d^2 - q^2}}.$$

Dieses ist genau dann Null, wenn der Zähler Null ist und dies ist genau bei $q \in \{\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{-d}{\sqrt{2}}\}$ der Fall. Nur einer diesen beiden Werte liegt im Intervall $(0, d)$ und wir haben zusätzlich noch zu prüfen, dass hier tatsächlich ein Maximum vorliegt. Hierfür müssen wir die zweite Ableitung von f bestimmen. Dies geht entweder über die Quotientenregel aus der Schule oder auch einfach über

$$(f \cdot f)'' = (2f \cdot f')' = 2f' \cdot f' + 2f \cdot f''.$$

Es ist $(f \cdot f)''(q) = -12q^2 + 2d^2$ und dies nimmt für $q = \frac{d}{\sqrt{2}}$ einen negativen Wert an. Da $f\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) = \frac{d^2}{2}$ und $f'\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) = 0$ nimmt folglich auch f'' bei $\frac{d}{\sqrt{2}}$ einen negativen Wert an und $\frac{d}{\sqrt{2}}$ ist ein Maximum von f. □

Falls Ihnen die letzten beiden Fragestellungen nicht zugesagt haben, nun eine aus dem Bereich der Wirtschaft. Hier ist die Mathematik wieder nötig, um bestimmen zu können, wie Gewinnen maximiert werden können.

Beispiel. *Von einer Kaffeesorte werden bei einem Preis von* 20 € *für* 1 *Kilogramm im Monat* 10000 *Kilogramm verkauft. Eine Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissekung um* 0,02 € *pro Kilogramm jeweils zu einer Absatzsteigerung von* 100 *Kilogramm pro Monat führte. Bei welchem Verkaufspreis ist der Gewinn maximal, wenn der Eigenkostenanteil pro Kilogramm Kaffee bei* 14 € *liegt?*

Wir möchten den Gewinn in Abhängigkeit zur Veränderung des Verkaufspreises angeben. Wie sieht dies aus? Angenommen wir senken den Preis x Mal um 2 Cent. Wie viele Kilogramm Kaffee verkaufen wir dann voraussichtlich? Und wie viel Gewinn machen wir dann noch pro Kilogramm?

$$f(x) = (10000 + 100x) \cdot (20 - 0,02x - 14)$$

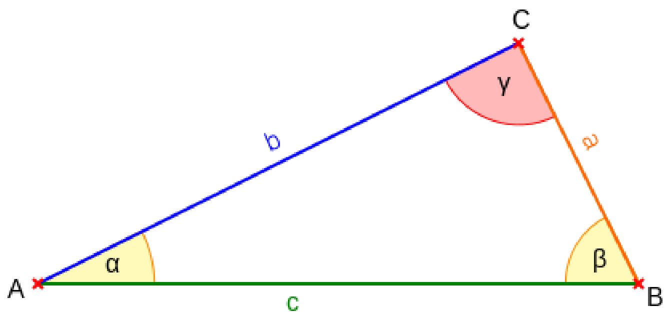
modelliert unser Problem. Es geht nun also darum Maxima dieser Funktion zu finden.

Lemma 18. *Die Funktion* $f(x) = (10000 + 100x) \cdot (20 - 0,02x - 14)$ *hat ein Maximum bei* $x = 100$*, d.h. bei einem Verkaufspreis von* 18 € *wird der Gewinn maximiert.*

Beweis. Aus Zeitgründen wird dieser Beweis kürzer ausfallen, aber quadratische Funktionen wurden in den vergangenen Tagen ja auch schon ausführlich diskutiert.
Es gilt $f'(x) = -4x - 400$ und $f''(x) = -4$. Somit ist die Nullstelle $x = 100$ der ersten Ableitung automatisch ein Maximum. $\square$

2.5 Extremwerte 2

Heute wollen wir ähnlich wie gestern Anwendungsprobleme aus dem echten Leben betrachten und modellieren, so dass wir sie mit Hilfe der Analysis lösen können. Allerdings soll es heute um Fragestellungen gehen, die die Verwendung von trigonometrischen Funktionen nötig macht. Ich bin optimistisch, dass diejenigen von Ihnen, die mit diesen Funktionen in der Schule wenig Kontakt hatten, dennoch gut werden folgen können. Wie schon mehrfach angekündigt, werden wir in der ersten Oktoberwoche noch ausführlich über trigonometrische Funktionen sprechen.
Eine kurze Erinnerung möchte ich dann aber doch geben. Betrachten Sie folgendes rechtwinklige Dreieck (γ seien 90°).



Dann gilt:

Definition 8. *Es ist* $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ *und* $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$

Beispiel. *Aus drei Brettern, die alle die Länge l haben, soll eine (trapezförmige) Rinne mit maximalen Fassungsvermögen gebaut weredn. Wie groß muss dafür der Neigungswinkel der Seitenbretter gewählt werden? (Wir nehmen hierbei an, dass eine Rinne symmetrisch ist, d.h. nur ein Winkel gewählt werden muss)*

Es gilt also erneut einen Flächeninhalt zu maximieren. Wie berechnet sich nun dieser Flächeninhalt? Und wie wird er maximiert?

- Wir teilen die Rinne in ein Rechteck und zwei (gleiche) rechtwinklige Dreiecke auf. Zur Bestimmung des Flächeninhalts müssen wir dann die Höhe h der Rinne in Abhängigkeit des Winkels α zwischen den Brettern bestimmen. Nach dem Strahlensatz gilt $\cos(\alpha) = \frac{h}{l}$ und somit berechnet sich der Flächeninhalt zu

$$l \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{2} lh \sin(\alpha) = l^2 \big(\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) \big).$$

- Es geht also darum ein Maximum der Funktion $f(\alpha) = l^2\big(\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\big)$ auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ (in Winkeln gesprochen also zwischen 0 und 90 Grad) zu finden.

Wir wissen bereits, dass wir dies durch Bilden der ersten beiden Ableitungen und dem Suchen von Nullstellen lösen können.

Lemma 19. *$f(\alpha) = l^2\big(\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\big)$ hat auf $(0, \frac{\pi}{2})$ ein Maximum bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (d.h. $30°$). Der zugehörige Funktionswert ist $\frac{3\sqrt{3}}{4}l^2$.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die ersten beiden Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= l^2\big(- \sin(\alpha) + \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\big) \\ &= l^2\big(- \sin(\alpha) + 1 - 2\sin(\alpha)^2\big) \\ f''(\alpha) &= l^2\big(- \cos(\alpha) - 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)\big) \end{aligned}$$

Wie bestimmen wir nun Nullstellen der ersten Ableitung?
Ich schlage vor, dass wir zunächst die Nullstellen x_1, x_2 der quadratischen Gleichung $-x+1-2x^2$ bestimmen und dann solche α suchen, die $\sin(\alpha) = x_1$ oder $\sin(\alpha) = x_2$ erfüllen.
Was sind also die Nullstellen dieser Gleichung? Und wie findet man sie?
Eine Möglichkeit ist natürlich einfach die Verwendung der p-q-Formel, aber durch Anschauen der Gleichung erkennt man auch leicht, dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle ist und dann kann man die zweite Nullstelle zum Beispiel per Polynomdivision als $x_2 = \frac{1}{2}$ bestimmen.
Die Gleichung $\sin(\alpha) = -1$ ist für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ nicht lösbar und die Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ besitzt genau die Lösung $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (dies werden wir in der letzten Vorkurswoche noch ausführlich diskutieren).
Es gilt

$$f''(\frac{\pi}{6}) = l^2\big(- \cos(\frac{\pi}{6}) - 4\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6}) = l^2\big(- 3\cos(\frac{\pi}{6})\big).$$

Da der Kosinus auf $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv ist, ist dies eine negative Zahl und somit ist $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ein Maximum.
Um den zugehörigen Funktionswert auszurechnen, muss man noch wissen, dass $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, welches entweder schon aus der Schule bekannt ist oder in der letzten Vorkurswoche diskutiert wird. □

Als zweites Beispiel für den heutigen Tag wollen wir uns anschauen, wie man in der Physik aus dem Fermatschen Prinzip das Reflexionsgesetz herleiten kann.

Fermatsches Prinzip. Ein Lichtstrahl, der unter vorgegebenen Nebenbedingungen, von einem Punkt p zu einem Punkt q gelangen soll, schlägt immer den Weg ein, der die kürzeste (oder auch die längste) Zeit erfordert. $\square$

Beispiel. *Nehmen wir nun an $p = (0, y)$ und $q = (a, b)$ befinden sich in der oberen Halbebene und ein Lichtstrahl soll von p zu q gelangen, indem er an der x-Achse gespiegelt wird. Was können wir über den Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β der Spiegelung sagen?*
(Hierbei nehmen wir implizit an, dass sich Licht auf Geraden fortbewegt)

Ich nehme an, dass Sie aus dem Physikunterricht alle schon die Antwort kennen. Wichtiger als die Antwort ist hier auch zu sehen, dass exaktes mathematisches Begründen es erlaubt aus bereits bekannten Naturgesetzen neue abzuleiten. Dies allein ist schon eine gute Begründung dafür, dass es Sinn macht mathematische Theorien zu entwickeln, denn wer will heute schon vorhersagen können, welche Methoden von Physikern, Chemikern oder Biologen in 10 oder 20 Jahren benötigt werden, um die Natur besser und genauer beschreiben zu können?
Zurück zu unserem Problem mit den Winkeln: Sei $(x, 0)$ der Punkt auf der x-Achse, an dem der Lichtstrahl die Achse trifft. Wie können wir die Länge der Strecke von p zu q über $(x, 0)$ in Abhängigkeit der Winkel beschreiben?

- Lassen Sie uns zunächst einfach die Länge in Abhängigkeit von allem, was uns so einfällt bestimmen:
  Der Streckenabschnitt von p zum Auftreffpunkt auf die x-Achse berechnet sich nach dem Satz von Pythagoras zu $\sqrt{x^2 + y^2}$. Der Streckenabschnitt vom Auftreffpunkt zu q berechnet sich zu $\sqrt{(x-a)^2 + b^2}$. Hier ist nur x variabel, wir können also die Gesamtlänge des Weges, den der Lichtstrahl zurücklegen muss, in Abhängigkeit der x-Koordinate des Auftreffpunktes angeben.

- Was ist nun der Zusammenhang zwischen diesem x-Wert und Einfalls- und Ausfallswinkel?
  Nun, aus der Definition des Sinus und dem Strahlensatzes folgt $\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und ebenso $\sin(\beta) = \frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$.

Wir wollen trigonometrische Funktionen solange es geht aus unseren Überlegungen fernhalten, da das Rechnen mit Polynomen doch etwas leichter von der Hand geht, und analysieren nun zunächst einfach die Längenfunktion.

Lemma 20. *Die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + b^2}$ erfüllt bei allen Extremwerten $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$.*

Beweis. Wir berechnen hierfür die erste Ableitung von f. Diese ist gegeben als

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}.$$

Da für einen Extremwert die Ableitung verschwinden muss, folgt die Aussage. $\square$

Hieraus können wir mit dem Fermatschen Prinzip das Reflexionsgesetz folgern.

Korollar 5. *Es gilt $\alpha = \beta$, d.h. Einfallswinkel und Ausfallswinkel stimmen bei der Reflexion überein.*

Beweis. Nach dem Fermatschen Prinzip wählt das Licht als mögliche Strecke von p nach q über $(x, 0)$ einen kürzesten oder längsten Weg. In jedem Fall ist die erste Ableitung der Funktion f also Null und somit gilt $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x-a}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$. Wie wir uns weiter oben überlegt haben, bedeutet dies genau $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ und da $0° < \alpha, \beta < 90°$ gilt somit schon $\alpha = \beta$. $\square$

3 Woche 3: Analysis

3.1 Grenzwerte

Nachdem wir letzte Woche gesehen haben, wie die Analysis uns hilft bestimmte Minimierungs/Maximierungs-Fragestellung, die auch im echten Leben auftauchen können, zu behandeln, möchten wir diese Woche eine Wiederholung von Teilen der Analysis aus der Schule durchführen. Hierbei werden wir allerdings versuchen die mathematisch-logische Vorgehensweise (vor allem aus der ersten Woche) beizubehalten. Man kann sich fragen, wofür dies überhaupt nötig ist, aber wenn man sich überlegt, dass die Rechenregeln für Ableitungen ja auch erstmal gefunden werden mussten, macht es Sinn diesen Ansatz zu verfolgen. Bevor wir Ableitungen diskutieren können, benötigen wir den Begriff der Folge und der Konvergenz. Als Vorbereitung hierfür benötigen wir die Betragsfunktion.

Definition 9. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag von x, geschrieben $|x|$, ist definiert als*

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Der Betrag erfüllt folgende, wichtige Eigenschaften:

Lemma 21. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $|x| = |-x|$
2. $|x| \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$
3. $|x| = 0 \iff x = 0.$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis.

1. Dies folgt direkt aus der Definition.
2. Dies folgt ebenfalls direkt aus der Definition.
3. Wenn $x = 0$ ist, so ist $|x|$ ebenfalls Null nach der Definition. Falls andererseits $x \neq 0$, so ist auch $-x \neq 0$. In jedem Fall ist also der Betrag ungleich Null.
4. Für positive Zahlen x und y gilt $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$. Der Fall, dass mindestens eine der beiden Zahlen negativ ist, kann unter Verwendung von Eigenschaften eins auf diesen Fall reduziert werden.

5. Nach Definition des Betrages haben wir $x, -x \leq |x|$ und genauso auch $y, -y \leq |y|$. Somit gilt dann auch $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. Zusammengesetzt ist also auch $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

Wir interessieren uns für den Betrag, da $|x-y|$ den „Abstand“ beschreibt, den x und y auf der Zahlengerade haben.
Nun können wir über Folgen und vor allem über deren Konvergenz sprechen.

Definition 10.

- *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht aus einer reellen Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ für jede natürliche Zahl n.*
- *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine reelle Zahl a, falls für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl m_ϵ existiert, so dass für alle $n \geq m_\epsilon$*
$$|a - a_n| < \epsilon$$
gilt.
- *In diesem Fall schreiben wir $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

Diese Konzept sind auf den ersten Blick sehr abstrakt und sagen anschaulich, dass fast alle Folgenglieder sehr nahe am Grenzwert liegen. Wir wollen besser verstehen, was es mit diesen Definitionen auf sich hat und dazu einige Beispiele anschauen.

Beispiele.

- *Die Folge $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert nicht, d.h. sie konvergiert gegen keine reelle Zahl. Um dies einzusehen, sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $n-1 > a$. Also gilt für jede natürliche Zahl $m \geq n$ auch, dass $|a-m| = |m-a| = m-a = m-(n-1)+(n-1)-a > 1+(n-1)-a > 1$. Somit kann die Folge nicht gegen a konvergieren und da a beliebig war, kann die Folge überhaupt nicht konvergieren.*
- *Die Folge $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.*
- *Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 0. Um dies zu sehen sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{n} < \epsilon$ für alle $m \geq n$. Für ein solches n ist dann natürlich auch $|0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon$ und die Behauptung folgt.*
- *Die Folge $a_n = 0$ für n gerade und $a_n = 1$ für n ungerade konvergiert nicht. Ein potenzieller Grenzwert müsste nämlich beliebig kleinen Abstand sowohl zu 0, als auch zu 1 haben und dies geht nicht.*

Lemma 22. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und seien a und b Grenzwerte dieser Folge. Sei $r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wenn wir $\epsilon = \frac{r}{2}$ in der Definition der Konvergenz gegen a einsetzen, erhalten wir eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - a| < \epsilon$ gilt. Genauso gibt es ein n_1, so dass für alle $n \geq n_1$ $|a_n - b| < \epsilon$ gilt. Wenn wir nun $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ wählen, so gilt dies sogar für beide Grenzwerte und wir erhalten für $n \geq n_2$

$$|a - b| = |a - a_n - (b - a_n)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| \leq 2\epsilon = r.$$

Da $r > 0$ beliebig war, folgt also $|a - b| = 0$ und somit auch $a = b$. □

Für konvergente(!) Folgen gibt es folgende nützliche Rechenregeln.

Lemma 23. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gilt:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

3. *Falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und alle $b_n \neq 0$ sind, so gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Man kann die Bedingungen für den letzten Teil noch leicht abschwächen, aber das soll uns hier nicht wirklich interessieren.

Beweis. Seien $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig.

1. Sei $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Sei weiterhin $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|b - b_n| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq m_\epsilon$. Sei nun l_ϵ das Maximum von m_ϵ und n_ϵ. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq l_\epsilon$

$$|a + b - (a_n + b_n)| = |a - a_n + b - b_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

und die Behauptung folgt.

2. Der Beweis dieser Aussage ist der ersten sehr ähnlich, nur in den Details etwas komplizierter. Sei $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{|a|+|b|+1}, 1\}$. Sei $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|a - a_n| < \delta$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Sei weiterhin $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$|b - b_n| < \delta$ für alle $n \geq m_\epsilon$. Sei nun l_ϵ das Maximum von m_ϵ und n_ϵ. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq l_\epsilon$

$$\begin{aligned}
|a \cdot b - (a_n \cdot b_n)| &= |a \cdot b - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a_n \cdot b_n| \\
&= |a(b - b_n) + (a - a_n)b_n| \\
&\leq |a(b - b_n)| + |(a - a_n)b_n| \\
&\leq |a||b - b_n| + |a - a_n||b_n| \\
&= |a||b - b_n| + |a - a_n||b_n - b + b| \\
&\leq |a||b - b_n| + |a - a_n||b_n - b| + |a - a_n||b| \\
&\leq |a|\delta + \delta^2 + |b|\delta \\
&= \delta(|a| + |b| + \delta) \\
&\leq \delta(|a| + |b| + 1) \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.

□

Mithilfe obiger Rechenregeln kann man viele Grenzwerte sehr leicht bestimmen.

Beispiel. *Wir berechnen* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$*. Bitte bemerken Sie zunächst, dass die Folgen in Zähler und Nenner jeweils NICHT konvergieren, wir also nicht einfach den letzten Teil des obigen Lemmas anwenden können. Andererseits können wir aber in Zähler und Nenner jeweils einen Faktor n ausklammern und kürzen und erhalten somit* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$*. Die beiden Folgen in Zähler und Nenner konvergieren nun nach dem ersten Teil des obigen Lemmas und einem vorherigen Beispiel und zwar gegen* 2*, bzw.* 1*. Also gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2}{1} = 2$.

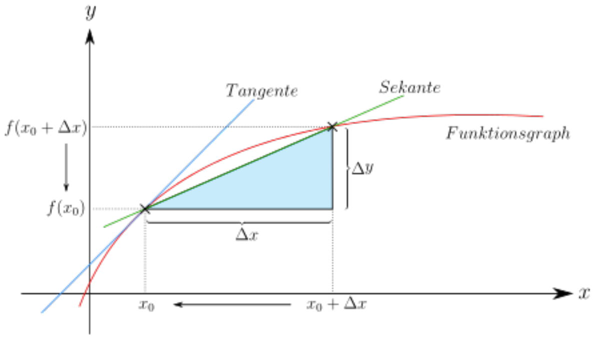
Zum Abschluss der heutigen Vorlesung noch ein nützliches Kriterium, welches es auf indirektem Wege erlaubt Konvergenz zu zeigen und den Grenzwert zu berechnen.

Lemma 24 (Sandwich-Lemma)**.** *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen. Angenommen es gilt für alle genügend großen n die Ungleichung* $a_n \leq b_n \leq c_n$*. Falls die Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent sind und ihr Grenzwert übereinstimmt, so ist auch die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und hat ebenfalls den selben Grenzwert.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

3.2 Ableitungen und Ableitungsregeln 1

Nachdem wir uns gestern mit Folgen und Konvergenz befasst haben, wollen wir diese heute verwenden, um über Ableitungen zu sprechen. Wie Sie vermutlich aus der Schule wissen, handelt es sich bei der Ableitung einer Funktion um ein Maß ihrer Steigung. Schauen wir uns dies in einem Beispiel an. Wenn wir durch zwei Punkte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ auf dem Graphen eine Gerade legen (die sogenannte Sekante), so können wir deren Steigung als Quotienten $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ berechnen.



Nun sollte die Steigung in einem Punkt eine lokale Eigenschaft sein und nicht von dem gewählten Dreieck abhängen. In obiger Zeichnung sehen wir auch anschaulich, dass die Sekante, je näher wir den zweiten Punkt zum ersten wählen, immer besser die Tangente approximiert. Wir gehen also zum Grenzwert über.

Definition 11. *Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0\in\mathbb{R}$. Die Funktion f heißt im Punkt x_0 differenzierbar, falls*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Hiermit ist gemeint, dass für alle Folgen $(h_n)_{n_{\mathbb{N}}}$ mit Grenzwert Null, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ existiert und alle diese Grenzwerte übereinstimmen.
Falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist, schreiben wir $f'(x_0)$ für diesen Grenzwert.
Eine Funktion, die in jedem Punkt differenzierbar ist, nennen wir differenzierbar.

Man kann Differenzierbarkeit auch für Funktionen, die nur auf bestimmten Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert sind, betrachten, aber diese Feinheit wollen wir ignorieren.

Beispiele. • *Die Funktion $f(x) = x$ ist in jedem Punkt differenzierbar, denn es gilt*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Ihre Ableitung ist folglich die konstante Funktion $f(x) = 1$.

- *Die Funktion $f'(x) = x^2$ ist in jedem Punkt differenzierbar, denn es gilt*

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

  Ihre erste Ableitung ist folglich $f'(x) = 2x$.

- *Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Dies ist anhand einer Zeichnung ihres Graphen leicht einzusehen, da wir hier zwei verschiedene Tangenten anlegen können, je nachdem ob wir „von rechts“ oder „von links“ kommen. Anhand dieser geometrischen Intuition lässt sich auch leicht ein Beweis dafür finden, dass die Differenzierbarkeitsbedingung in $x_0 = 0$ verletzt ist:*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_0+\frac{1}{n}|-|x_0|}{\frac{1}{n}} = 1,$$

  aber

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_0+\frac{-1}{n}|-|x_0|}{\frac{-1}{n}} = -1.$$

Zunächst eine technische Beobachtung, die aber im späteren mathematischen Leben wichtig sein wird.

Lemma 25. *Falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist, so gilt*

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Beweis. Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage ist falsch und es gibt eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_0+a_n)$ entweder nicht existiert oder ungleich $f(x_0)$ ist. In beiden Fällen existiert eine positive, reelle Zahl ϵ, so dass für unendlich viele der a_n gilt, dass $|f(x_0+a_n)-f(x_0)| > \epsilon$. Indem wir nur diese a_n betrachten, erhalten wir also eine neue Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, weiterhin konvergent mit Grenzwert Null, so dass für alle n $|f(x_0+b_n)-f(x_0)| > \epsilon$ gilt.
Sei nun $b \in \mathbb{R}$ eine beliebige positive Zahl und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle

$n \geq n_0$ bereits $|b_n| < \frac{\epsilon}{b}$ gilt. Dann ist also $|\frac{\epsilon}{b_n}| > b$ für alle $n \geq n_0$ und wegen $|\frac{f(x_0+b_n)-f(x_0)}{b_n}| > |\frac{\epsilon}{b_n}|$ ist somit $\frac{f(x_0+b_n)-f(x_0}{b_n}$ keine konvergente Folge. Da dies der Differenzierbarkeit von f in x_0 widerspricht muss unsere Annahme falsch sein und die Behauptung folgt. □

Aus den Rechenregeln für Summe und Produkt konvergenter Folgen lassen sich ähnliche Regeln für die Differenzierbarkeit herleiten. Wie Sie bereits wissen, gibt es auch eine Rechenregel für Quotienten. Diese werden wir morgen diskutieren.

Lemma 26. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und seien diese im Punkt x_0 differenzierbar. Dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x0)$$

und

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Falls $g(x_0)$ und $g'(x_0)$ beide ungleich Null sind, ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall der Summe zweier Funktionen f und g. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}$$

existiert und gleich

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

ist. Wegen

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

folgt dies direkt aus der Rechenregel für die Summe zweier konvergenter Folgen.
Nun behandeln wir den Fall des Produktes. Wir haben

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h},$$

denn es ist $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ und somit sind alle Terme konvergent und wir können die üblichen Rechenregeln für konvergente Folgen anwenden. Nach einer weiteren Anwendung dieser Regeln folgt dann aber auch schon die Behauptung. $\square$

Nun können wir direkt einsehen, dass alle Polynome differenzierbar sind.

Korollar 6. *Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom. Dann ist f in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1$.*

Beweis. Nach der Regel für Quotienten genügt es zu zeigen, dass f und g einzeln differenzierbar sind. Nach der Regel für Summen und Induktion, genügt es dann den Fall $f(x) = a \cdot x^n$ zu behandeln. Nach der Regel für Produkte und Induktion genügt es schlussendlich den Fall $f(x) = a \cdot x$ zu behandeln und dieser folgt analog zum oben betrachteten Beispiel mit Vorfaktor $a = 1$. $\square$

3.3 Ableitungen und Ableitungsregeln 2

Gestern haben wir Ableitungen definiert und erste Rechenregeln für diese hergeleitet. Heute wollen wir uns mit der Ketten- und der Quotientenregel beschäftigen. Lassen Sie uns zunächst ein kleines Beispiel diskutieren, welches die Definition nochmal in Erinnerung ruft und uns später nützlich sein wird.

Beispiel. *Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Dann ist f in ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

existiert und gleich $-\frac{1}{x^2}$ ist. Dazu berechnen wir

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

und letzterer Term hat, wenn wir h gegen Null gehen lassen, den gewünschten Grenzwert. □

Nun kommen wir zur Kettenregel, die sich mit der Verkettung, d.h. Hintereinanderausführung, von Funktionen befasst.

Definition 12. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist die Funktion $f \circ g$, gesprochen „f nach g“, gegeben durch $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.*

Ein kleines Beispiel, um dies zu verdeutlichen:

Beispiel. *Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$. Dann ist die Funktion $f \circ g$ gegeben durch $x \mapsto (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.*

Satz 15. *Seien f und g zwei Funktionen. Es seien g im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und f im Punkt $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $f \circ g$ gegeben durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

Beweis. Wir erinnern uns an die Definition der Ableitung im Punkt x_0 und müssen deshalb

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h}$$

diskutieren. Wir möchten diesen Quotienten nun als

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

schreiben, denn dann folgte die Aussage direkt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und Lemma 24. Leider kann es passieren, dass $g(x_0+h) = g(x_0)$ und dann dürfen wir diese Manipulation nicht vornehmen. Um diesen Ansatz zu „reparieren“ verwenden wir die Funktion H gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(g(x_0))}{x-g(x_0)} & x \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & x = g(x_0). \end{cases}$$

Nun haben wir

$$H(g(x_0+h)) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h},$$

denn für alle h mit $g(x_0+h) \neq g(x_0)$ ist dies klar nach Definition und im anderen Fall sind beide Seiten Null, also ebenfalls gleich.
Wenn also der Grenzwert $\lim_{h\to 0} H(g(h))$ existiert und gleich $f'(g(x_0))$ ist, so folgt die Behauptung aus den Rechenregeln für das Produkt zweier konvergenter Folgen, da der rechte Term nach Annahme existiert und gleich $g'(x_0)$ ist. Die Aussagen über den Grenzwert $\lim_{h\to 0} H(g(h))$ sind intuitiv einsichtig, allerdings etwas technisch zu beweisen. Sie verwenden das erste Lemma der gestrigen Vorlesung und natürlich die Annahmen, dass f und g differenzierbar sind. Der ganze Beweis ist sicherlich Teil der Vorlesung Analysis 1. □

Als Korollar aus der Kettenregel wollen wir nun die Quotientenregel herleiten.

Korollar 7. *Seien f und g zwei Funktionen, differenzierbar im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und es seien $g'(x_0)$ und $g(x_0)$ ungleich Null. Dann ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ in diesem Punkt differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis. Da $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, können wir die Produktregel für Ableitungen anwenden und müssen nun also noch die Ableitung von $\frac{1}{g}$ berechnen. Dies erledigen wir mit der Kettenregel und obigem Beispiel, denn $\frac{1}{g}$ ist die Verkettung von zunächst $g(x)$ und dann $\frac{1}{x}$. Da beide Funktionen nach Annahme differenzierbar sind in x_0 folgt aus der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

Setzen wir dies nun in die Produktregel für $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x)$ ein, so erhalten wir

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

Wenn man alles auf den Hauptnenner $g(x)^2$ bringt, so folgt die Behauptung. □

Zum Abschluss der heutigen Vorlesung wollen wir noch eine fundamentale Aussage über Ableitungen diskutieren, den Mittelwertsatz.

Satz 16 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, so dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mit anderen Worten gibt es also einen Punkt zwischen a und b, so dass die Steigung der Funktion in diesem Punkt der „durchschnittlichen" Steigung zwischen a und b entspricht.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage erfordert mehr Techniken als wir hier diskutieren können und erfolgt in der Vorlesung Analysis 1. □

Der Mittelwertsatz hat viele nützliche Auswirkungen.

Korollar 8. *Es gilt:*

1. *Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) streng monoton wachsend.*
2. *Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) streng monoton fallend.*
3. *Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) monoton wachsend.*
4. *Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) monoton fallend.*
5. *Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) konstant.*

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage, der Rest wird in den Übungen behandelt.
Seien $c < d \in (a, b)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann x_0 mit $c < x_0 < d$, so dass $f'(x_0) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$. Da $d - c$ und $f'(x_0)$ positiv sind, muss auch $f(d) - f(c)$ positiv sein und die Aussage ist gezeigt. □

Bemerkung. *Die Umkehrung der Aussagen in Teil drei und vier ist auch wahr, da der Grenzwert einer positiven Folge immer nicht-negativ ist.*

3.4 Minima und Maxima

Nachdem wir die lezten beiden Tage Ableitungen und Möglichkeiten zur Berechnung von Ableitungen besprochen haben, wollen wir heute dieses Wissen anwenden, um Kriterien für das Auffinden von Minima und Maxima von Funktionen zu entwickeln.

Definition 13. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt x_0 heißt lokales Minimum von f, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| < \epsilon$ gilt, dass $f(x_0) \leq f(x)$. Falls dies für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig ist, so heißt x_0 globales Minimum von f.*
Ein Punkt x_0 heißt lokales/globales Maximum von f, falls x_0 ein lokales/globales Minimum von $-f$ ist. Hierbei bezeichnet $-f$ die Funktion $x \mapsto -f(x)$.

Eine Funktion muss nicht zwangsläufig Minimum und/oder Maximum besitzen, bedenken Sie zum Beispiel die Funktion $f(x) = x$.
Wenn wir uns daran erinnern, dass die Ableitung einer Funktion in einem Punkt, die Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt beschreiben soll, überrascht es nicht, dass die Ableitung in lokalen Minima oder Maxima Null sein sollte. Das folgende Lemma bestätigt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Lemma 27. *Sei f eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum von f. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum von f und sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle x mit $|x_0 - x| < \epsilon$. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $a_n = \frac{\epsilon}{n+1}$ und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $b_n = \frac{-\epsilon}{n+1}$. Beides sind konvergente Nullfolgen. Die erste besteht nur aus positiven reellen Zahlen, die zweite nur aus negativen. Nun hat $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$ somit ein negatives Vorzeichen, da x_0 ein lokales Maximum ist, und $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+b_n)-f(x_0)}{b_n}$ ein positives. Doch da f differenzierbar ist, müssen beide Werte übereinstimmen. Da Null die einzige reelle Zahl ist, die gleich ihrem Negativen ist, folgt somit $f'(x_0) = 0$.
Der andere Fall folgt analog oder unter Anwendung des eben gezeigten auf $-f$. $\square$

Wenn wir Minima und Maxima einer differenzierbaren Funktion suchen, müssen wir uns also die Nullstellen ihrer Ableitung anschauen. Diese sind allerdings nicht automatisch lokale Minima oder Maxima, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. *Sei $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und dies hat als einzige Nullstelle die Null. Allerdings ist Null sicherlich kein lokales Minimum oder*

Maximum von f, denn $f(0) = 0$ und für jede negative Zahl x ist auch $f(x)$ negative, wohingegen für jede positive Zahl x der Wert $f(x)$ ebenfalls positiv ist.

Um zu verstehen, was hier passiert, brauchen wir eine weitere Definition.

Definition 14. *Sei f eine differenzierbare Funktion und sei f' ebenfalls differenzierbar. Dann nennen wir $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f. Analog definieren wir die dritte, vierte, etc. Ableitung, falls dies einen Sinn ergibt.*

In obigem Beispiel ist der Wert der zweiten Ableitung in Null ebenfalls Null. Es stellt sich heraus, dass dies im Prinzip das einzige Hindernis für das Vorliegen eines Minimums oder Maximums ist. Um dies zu beweisen, benötigen wir den Mittelwertsatz aus der vergangenen Vorlesung. Zur Erinnerung folgt hier nochmal das Korollar, welches wir aus dem Mittelwertsatz in der Vorlesung und den Übungen hergeleitet hattem.

Korollar 9. *Es gilt:*

1. *Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) streng monoton wachsend.*

2. *Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) streng monoton fallend.*

3. *Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) monoton wachsend.*

4. *Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) monoton fallend.*

5. *Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) konstant.*

Satz 17. *Es sei f eine differenzierbare Funktion, so dass f' ebenfalls differenzierbar ist. Sei x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gegeben. Falls $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum von f. Falls $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum von f.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $f'(x_0) = 0 < f''(x_0)$. Da $f''(x_0) > 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \epsilon$ gilt, dass $\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} > 0$ ist.
Da $f'(x_0) = 0$, folgt somit, dass f' auf $(-\epsilon+x_0, x_0)$ negativ und auf $(x_0, x_0+\epsilon)$ positiv ist. Mit obigem Korollar ist also f' auf $(-\epsilon + x_0, x_0)$ streng monoton fallend und auf $(x_0, x_0 + \epsilon)$ streng monoton wachsend.
Aber dies bedeutet nichts anderes, als das x_0 ein lokales Minimum von f ist und die Aussage ist somit bewiesen. Der andere Fall folgt wieder analog oder durch die Anwendung auf $-f$. □

Folgendes ist eine, manchmal nützliche, Verallgemeinerung diese Kriteriums.

Satz 18. *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Sei f eine $2n$-mal differenzierbare Funktion. Es seien die ersten $2n-1$ Ableitungen von f im Punkt x_0 gleich Null und die $2n$-te Ableitung ungleich Null. Falls diese positiv ist, so ist x_0 ein lokales Minimum von f, andernfalls ein lokales Maximum.*

Für den Beweis benötigen wir folgende Hilfsaussage:

Lemma 28. *Sei f zwei Mal differenzierbar und seien $f'(x_0) = 0 = f''(x_0)$. Falls x_0 ein lokales Minimum/Maximum von f'' ist, so ist x_0 auch ein lokales Minimum/Maximum von f.*

Beweis. Wir beweisen den Fall eines Minimums.
Da x_0 ein lokales Minimum von f'' ist, gibt es ein Intervall (a, b) mit $x_0 \in (a, b)$, so dass für alle $x \in (a, b)$ $f''(x) \geq f''(x_0) = 0$ gilt. Also ist nach dem Mittelwertsatz f' auf dem Intervall (a, b) monoton wachsend. Da $f'(x_0) = 0$, gilt also, dass $f'(x) \leq 0$ für alle $a < x \leq x_0$ ist und $f'(x) \geq 0$ für alle $x_0 \leq x < b$. Eine erneute Anwendung des Mittelwertsatzes liefert dann, dass f auf (a, x_0) monoton fallend und auf (x_0, b) monoton steigend ist. Somit muss c ein lokales Minimum von f sein. □

Nun folgt der Beweis des Satzes.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion. Der Fall $n = 1$ wurde in Satz 17 bewiesen. Der Induktionsschritt folgt, wenn man die Aussage auf f'' und dann die Hilfsaussage nutzt. □

Zum Abschluss der Vorlesung werden wir noch ausführlich ein Beispiel diskutieren.

Beispiel. *Für welche ganze Zahl n ist das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger am kleinsten?*

Beweis. Zunächst müssen wir eine Funktion definieren, deren Minimum der in der Frage gewünschten Größe entspricht. Hierbei bietet sich die Funktion $f(x) = (x-1)(x+1)$ an. Ausmultiplizieren ergibt $f(x) = x^2 - 1$.
Dies ist ein Polynom und somit wissen wir bereits, dass f differenzierbar ist. Da f' ebenfalls ein Polynom ist, existiert auch f''.
Wir suchen also diejenige ganze(!) Zahl für die f den kleinstmöglichen Wert annimmt. Mit obigen Methoden können wir dieses Problem eigentlich nur für beliebige reelle Zahlen angehen und wissen nicht, ob die entstehenden Extremwerte ganze Zahlen sind, aber in diesem Fall ist dies glücklicherweise

so.
Es gilt: $f'(x) = 2x$. Dieses besitzt genau eine Nullstelle, nämlich die Null. Da jedes Extremum x_0 zwangsläufig $f'(x_0) = 0$ erfüllt, gibt es also höchstens einen Extremwert von f. Da $f''(x) = 2$ ist, ist die Null tatsächlich ein lokales Minimum. Außerdem ist Null eine ganze Zahl, d.h. wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass Null sogar ein globales Minimum von f ist.
Dies folgt aus obigem Korollar, denn $f'(x) = 2x$ ist auf $(-\infty, 0)$ negativ und auf $(0, \infty)$ positiv. Somit ist f auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend. $\square$

3.5 Polynomdivision und Konvexität

Wir haben diese Woche bereits die meisten Aspekte der Kurvendiskussion, wie wir sie vergangene Woche eingeführt haben diskutiert. Heute wollen wir noch zwei ausstehende Punkte behandeln, nämlich die Polynomdivision mit deren Hilfe wir manchmal Nullstellen von Polynomen finden können, und die Konvexität, d.h. das Krümmungsverhalten der Funktion.
In allem was folgt sei der Einfachheit-halber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion.

3.5.1 Nullstellen

Zunächst geht es darum die Nullstellen von f zu bestimmen, d.h. alle Werte x mit $f(x) = 0$ zu finden. Im Allgemeinen ist dies eine sehr schwierige Aufgabe, selbst für Polynome. Für Polynome vom Grad zwei hat man allerdings die bekannte p-q-Formel zur Verfügung und für Polynome höheren Grades kann man, wenn man eine Nullstelle gefunden oder geraten hat, das folgende Resultat verwenden.

Lemma 29 (Polynomdivision)**.** *Seien* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *und* $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ *Polynome mit* $a_0 \neq 0 \neq b_0$*. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome* p *und* q*, wobei der Grad von* q *kleiner als* m *ist, mit* $f = p \cdot g + q$*.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz solcher Polynome und erst im Anschluss dann ihre Eindeutigkeit.
Falls $n < m$, so setzen wir $p = 0$ und $q = f$. Falls $n \geq m$ und sei die Aussage für alle Polynome vom Grad kleiner n schon gezeigt, so betrachten wir $f - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g$. Dies ist ein Polynom strikt kleineren Grades, es gibt also Polynome $\bar{p}$ und $\bar{q}$ mit $f - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g = \bar{p}g + \bar{q}$. Wenn wir diese Gleichung umstellen, so erhalten wir

$$f = \big(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \bar{p}\big)g + \bar{q}$$

und die Behauptung folgt mit $p = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \bar{p}$ und $q = \bar{q}$.
Nun wollen wir noch zeigen, dass p und q eindeutig sind. Seien also Polynome P und Q mit $f = Pg+Q$ gegeben und wir haben, dass der Grad von Q kleiner als m ist. Dann ist

$$0 = f - f = pg + q - Pg + Q = (p - P)g + (q - Q).$$

Da der Grad von g echt größer ist als der Grad von $q-Q$ muss schon $p-P = 0$ gelten. Hieraus folgt dann auch direkt $q - Q = 0$ und die Eindeutigkeit ist gezeigt. □

Bemerken Sie, dass der Induktionsbeweis nur etwas verklausuliert besagt, dass die Division bei Polynomen genauso funktioniert wie die Division mit Rest im Fall von ganzen Zahlen, die wir alle schon aus der Grundschule kennen!

Beispiel. *Wir wollen gemeinsam alle Nullstellen der Funktion $x^4 - 1$ finden. Können Sie mir z.B. durch Ausprobieren eine Nullstelle der Funktion nennen?*
Genau, wir sehen sehr schnell, dass 1 und -1 Nullstellen dieser Funktion sind. Also muss $x^4 - 1$ durch $x^2 - 1$ teilbar sein. Polynomdivision (oder auch die dritte binomische Formel) liefert uns dann $x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

3.5.2 Konvexität

Angenommen wir haben nun zum Beispiel herausgefunden, dass f an der Stelle x_0 eine Nullstelle hat und dass der nächste Hochpunkt an der Stelle x_1 liegt. Wenn wir die Funktion nun zeichnen wollen, möchten wir gerne noch wissen, ob wir eine gerade Linie zwischen x_0 und x_1 ziehen sollen oder ob sie geschwungen ist und wenn ja in welche Richtung. der Begriff der Konvexität macht dies präzise.

Definition 15. *Eine Funktion f heißt konvex auf dem Intervall (a, b), falls für alle $x, y \in (a, b)$ und alle $t \in (0, 1)$*

$$f\big(tx + (1 - t)y\big) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

gilt. Eine Funktion f heißt konkav auf (a, b), falls $-f$ konvex auf (a, b) ist.

Anschaulich bedeutet Konvexitität also, dass der Graph einer Funktion unterhalb der Verbindungsgerade zwischen je zwei der Funktionswerte an Punkten in (a, b) liegt und Konkavität, dass der Graph überahlb dieser Geraden verläuft.
Der folgende Satz gibt uns ein nützliches Kriterium zur Überprüfung der Konvexität an die Hand. Bevor wir ihn beweisen können, benötigen wir noch folgendes Hilfslemma.

Lemma 30. *Sei f eine Funktion und $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion f ist genau dann auf (a, b) konvex, wenn für alle $x_1 < x < x_2 \in (a, b)$ die Ungleichung*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

gilt.

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber $x_1 = a$ und $x_2 = b$ an. Dies vereinfacht die Notation,d er Beweis des allgemeinen Falls ist aber genau der selbe.
Jedes $x \in (a, b)$ lässt sich als $x = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b$ für ein $\lambda \in (0, 1)$ darstellen (nämlich mit $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$) und umgekehrt liefert auch jeder solcher Ausdruck ein Element aus (a, b).
Nun gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

für x genau dann, wenn

$$\frac{f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) - f(a)}{\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b - a} \leq \frac{f(b) - f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b)}{b - \lambda \cdot a - (1 - \lambda) \cdot b}$$

gilt.
Die Nenner lassen sich umformen, so dass obige Umgleichung zu

$$\frac{f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) - f(a)}{(1 - \lambda) \cdot (b - a)} \leq \frac{f(b) - f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b)}{\lambda \cdot (b - a)}$$

äquivalent ist. Da $b - a$ und $\lambda(1 - \lambda)$ beide positiv sind, gilt diese Ungleichung also genau dann, wenn

$$\lambda\big(f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) - f(a)\big) \leq \big(1 - \lambda\big)\big(f(b) - f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b)\big)$$

gilt.
Letzteres formt sich leicht um zu der Bedingung, die in der Definition der Konvexität auftaucht. □

Nun kommen wir zum schon letzte Woche angekündigten Satz, der das Krümmungsverhalten in Verbindung mit der zweiten Ableitung bringt. Wenn wir diese als Steigung der Steigung von f interpretieren, ist anschaulich klar, dass der Satz gelten sollte.

Satz 19. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist konvex auf (a, b).*
2. *f' ist monoton wachsend auf (a, b).*
3. *$f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt die Äquivalenz der Aussagen zwei und drei. Die Äquivalenz zu Aussage eins verwendet obiges Lemma und ebenfalls den Mittelwertsatz und ist Teil der Übungen heute Nachmittag. □

4 Woche 4: Besondere Funktionen

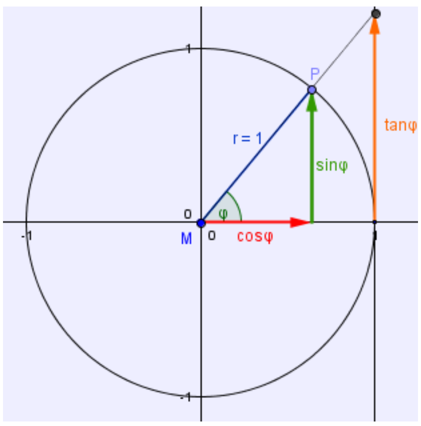
4.1 Trigonometrische Funktionen 1

Willkommen in der vierten Woche des Vorkurses. Nachdem wir uns letzte Woche ausführlich mit Ableitungen und Kurvendiskussionen befasst haben, möchten wir diese Woche einige spezielle, wichtige Funktionen betrachten und u.a. eine Kurvendiskussion für sie durchführen. Hierbei wählen wir einen möglichst elementaren Zugang. Vieles geht z.B. unter Verwendung von Potenzreihen deutlich einfacher, braucht dafür aber auch im Vorfeld deutlich mehr Theorie und ist weniger anschaulich. Heute soll es um die trigonometrischen Funktion sin, cos und tan gehen.

Definition 16. *Der Einheitskreis $K \subset \mathbb{R}^2$ sind alle die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$.*

Wir stellen uns nun vor, dass wir die reelle Gerade $\mathbb{R}$ um den Einheitskreis wickeln (mit „gleichbleibender Geschwindigkeit“). Hierbei legen wir die Null auf den Punkt $(1, 0)$ und wickeln die positiven reellen Zahlen gegen den Uhrzeigersinn. Da der Einheitskreis Radius 1 hat, hat er also Umfang 2π und eine reelle Zahl x landet also an der gleichen Stelle wie $x + 2n\pi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 17. *Sei $x \in \mathbb{R}$ gedacht als ein Punkt (a, b) auf dem Einheitskreis. Wir bilden das rechtwinklige Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, (a, b) und $(a, 0)$. Wir definieren den Sinus von x, geschrieben $\sin(x)$, als die Länge(mit Vorzeichen!) der Gegenkathete des Winkels an $(0, 0)$, d.h. $\sin(x) = b$ und den Kosinus von x, geschrieben als $\cos(x)$, als die Länge der Ankathete des Winkels an $(0, 0)$, d.h. $\cos(x) = a$. Wir definieren den Tangens von x, geschrieben als $\tan(x)$, als $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, falls $\cos(x) \neq 0$.*



Zunächst ein Lemma, welches einfache Eingeschaften von Sinus und Kosinus festhält.

Lemma 31. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen.*

1. *Für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ist $\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$.*

2. *Für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ist $\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$.*

3. *Es ist $\sin(-x) = -\sin(x)$.*

4. *Es ist $\cos(-x) = \cos(x)$.*

5. *Es gilt $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.*

6. *Es gilt $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.*

7. *Es gilt $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.*

8. *Es gilt $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.*

Beweis.

1. Diese Aussage folgt direkt aus der Überlegung, dass der Punkt x und der Punkt $x + 2\pi n$ beim Wickeln um den Einheitskreis auf dem selben Kreispunkt landen.

2. Diese ebenso.

3. Spiegeln wir den Einheitskreis an der Geraden $(a, 0)$, so wird der gewickelte Punkt x auf den gewickelten Punkt $-x$ abgebildet. Damit folgt die Aussage.

4. Diese ebenso.

5. Das Substrahieren von $\frac{\pi}{2}$ entspricht genau dem Drehen nach rechts um $90°$ am Einheitskreis. Das so gedrehte Dreieck hat nun zwar den rechten Winkel an der falschen Stelle, wenn wir es an der Geraden durch $(0, 0)$ und $x - \frac{\pi}{2}$ spiegeln, entsteht aber das Dreieck zur Berechnung von $\sin(x - \frac{\pi}{2})$. Bei diesem sind nun Ankathete und Gegenkathete im Vergleich zum ursprünglichen Dreieck vertauscht (durch das Spiegeln) und somit folgt die Behauptung.

6. Diese Aussage folgt direkt daraus, dass Addition von π Drehen um $180°$ entspricht.

7. Diese ebenso.

8. Diese Aussage folgt direkt aus dem Satz von Pythagoras, da der Radius des Einheitskreise (und damit auch die Länge der Hypothenuse) 1 ist. Alternativ natürlich auch sofort aus der Definition des Einheitskreises K.

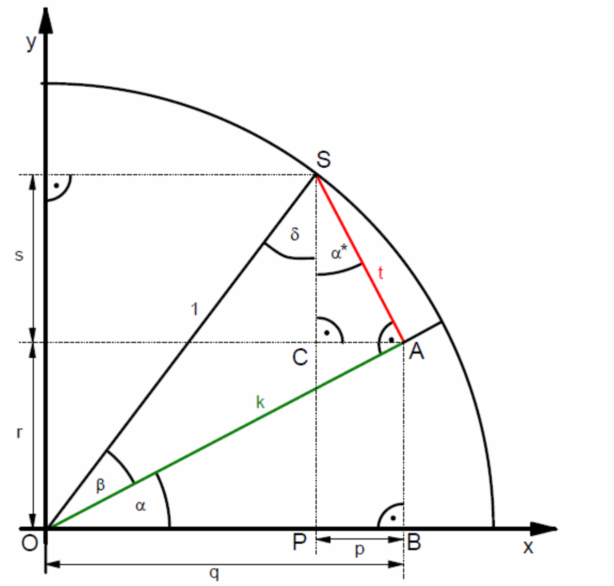
$\square$

Wie Sie aus der Schule bereits wissen, gibt es noch allerlei deutlich kompliziertere Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus in Form der sogenannten Additionstheoreme. Das folgende Lemma stellt einige davon vor.

Lemma 32. *Für beliebige relle Zahlen x und y gilt:*

1. $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
2. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage, die zweite wird in den Übungen besprochen.



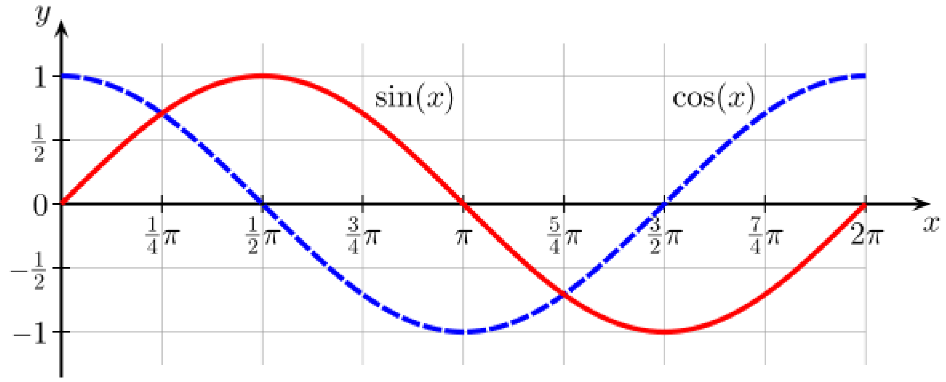
Es gilt $\sin(x+y) = r+s$. Aus dem Strahlensatz folgt $r = \sin(x)\cdot k$ und aus der Definition des Kosinus folgt $k = \cos(y)$. In obiger Zeichnung gilt $x = x'$, da die Winkelsumme jedes Dreiecks $180°$ sind. Eine weitere Anwendung des Strahlensatzes liefert also $s = \cos(x)\cdot t$ und nach Definition gilt $t = \sin(y)$. Zusammengesetzt folgt also die Behauptung.
Die Gleichung $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$ folgt hieraus, wenn man $\cos(-x) = x$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ nutzt. $\square$

Zum Ende des Tages diskutieren wir noch auf elementare Art und Weise die Nullstellen, Extremwerte und Monotonieverhalten von Sinus und Kosinus.

Lemma 33. *Der Sinus ist auf* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *streng monoton steigend und auf* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *streng monoton fallend. Seine Nullstellen liegen bei* $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. *Der Sinus hat lokale Maxima bei* $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ *und lokale Minima bei* $\{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. *Der Kosinus ist auf* $(0, \pi)$ *streng monoton fallend und auf* $(\pi, 2\pi)$ *streng monoton steigend. Seine Nullstellen liegen bei* $\{\frac{\pi}{2} + n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. *Der Kosinus hat lokale Maxima bei* $\{2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ *und lokale Minima bei* $\{(2n+1)\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. *Alle lokalen Maxima haben den Funktionswert 1 und alle lokalen Minima den Funktionswert* -1.

Beweis. Diese Aussagen folgen alle direkt aus der geometrischen Definition der beiden Funktionenn über den Einheitskreis. □

Somit ist es möglich nur aufgrund der Definition von Sinus und Kosinus eine Kurvendiskussion für sie durchzuführen. Wie Sie sicherlich alle bereits aus der Schule wissen, sehen die Graphen ungefähr wie folgt aus.



4.2 Trigonometrische Funktionen 2

Nachdem wir gestern die Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens über den Einheitskreis definiert haben, wollen wir heute zeigen, dass sie differenzierbar sind und ihre Ableitungen berechnen.

Satz 20. *Sinus, Kosinus und Tangens sind allesamt differenzierbar. Es gilt:*

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$
3. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Beweis. Wir zeigen zunächst, wie man aus der ersten Aussage die zweite und dann aus beiden Aussagen die dritte folgern kann:
Angenommen, wir wissen bereits, dass der Sinus differenzierbar ist und dass $\sin'(x) = \cos(x)$ gilt. Wegen $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ist der Kosinus als Verkettung von differenzierbaren Funktionen dann auch differenzierbar und die Kettenregel liefert

$$\cos'(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

Erneutes Anwenden von $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ liefert, dass dieser Ausdruck gleich

$$\sin(x - \pi) = \sin(-x) = -\sin(x)$$

ist.
Um zu sehen, dass der Tangens differenzierbar ist, nutzen wir die Quotientenregel für $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Da Zähler und Nenner diefferenzierbar sind, ist es auch der Tangens und die Ableitung berechnet sich zu

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos\prime(x)}{cos(x)^2}.$$

Unter Verwendung der beiden bereits bekannten Ableitungen steht im Zähler also $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$ und dieses ergibt bekanntermaßen 1.
Um den Beweis abzuschließen gilt es nun also

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

zu betrachten. Unter Verwendung eines Additionstheorems, welches wir gestern gezeigt haben, kann der Bruch zu

$$\frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

umgeformt werden. Ausklammern liefert dann

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$ und $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$ existieren, ist dies gleich

$$\sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$ und $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$. Dies erledigen die folgenden beiden Lemmata. □

Lemma 34. *Es ist*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=0.$$

Beweis. Sei zunächst $0<h<\frac{\pi}{2}$. Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist π. Somit ist die Fläche des „Tortenstücks“ , dessen Rand Länge h hat, genau $\frac{h}{2\pi}\pi=\frac{h}{2}$.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, welches Eckpunkten an $(0,0)$, $(\cos(h),\sin(h))$ und $(\cos(h),0)$ hat, ist $\frac{1}{2}\sin(h)\cos(h)$. Da dieses Dreieck im „Tortenstück“ enthalten ist, ist sein Flächeninhalt sicherlich kleiner. Also gilt

$$\frac{\sin(h)\cos(h)}{2}\leq\frac{h}{2}.$$

Nun betrachten wir noch das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse die Gerade von $(0,0)$ nach $(\cos(h),\sin(h))$ fortsetzt und dessen andere Seite auf der Achse $y=0$ liegt. Dies hat die Eckpunkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,\tan(h))$ (letzren nach dem Strahlensatz!). Somit ergibt sich als Flächeninhalt für dieses Dreieck $\frac{\tan(h)}{2}$. Da dieses Dreieck das „Tortenstück“ beinhaltet, haben wir also ebenfalls die Ungleichung

$$\frac{h}{2}\leq\frac{\tan(h)}{2}.$$

Durch einfach Umformungen erhalten wir somit die Ungleichungen

$$\cos(h)\leq\frac{\sin(h)}{h}\leq\frac{1}{\cos(h)}$$

für $0<h<\frac{\pi}{2}$. Aufgrund der Vorzeichenregeln für Sinus und Kosinus kann man hieraus die selbe Ungleichung für $-\frac{\pi}{2}<h<0$ folgern. Somit gilt für betragsmäßig genügend kleines h immer obige Ungleichung. Wenn wir nun (die von uns nicht bewiesene!) Tatsache $\lim_{h\to 0}\cos(h) = \cos(\lim_{h\to 0} h)$ verwenden, so folgt wegen $\cos(0) = 1$ die Behauptung. $\square$

Lemma 35. *Es ist*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$$

Beweis. Wir verwenden den Fakt $\lim_{h\to 0}\sin(h) = \sin(\lim_{h\to 0} h)$, sowie die analoge Aussage für den Kosinus. Denn nun folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{1+\cos(h)}$$

konvergiert und der Grenzwert $0 = \sin(0)$ ist. Damit können wir nun die eigentliche Aussage zeigen:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)^2}{h\big(\cos(h)+1\big)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)^2}{h\big(\cos(h)+1\big)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}
\end{aligned}$$

Aus unserer Vorüberlegung und dem vorherigen Lemma folgt nun die Behauptung. $\square$

Zum Abschluss der heutigen Vorlesung wollen wir noch eine Kurvendiskussion für die Tangensfunktion betreiben.

Definitionsbereich Der Tangens ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Nullstelle des Kosinus sind, definiert, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Wir haben $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, also ist der Tangens π-periodisch. Wir beschränken uns deswegen im Folgenden auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Nullstellen Der Tangens ist genau dann Null, wenn es der Sinus ist. Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist dies genau in der Null der Fall.

Symmetrie Wie wir bereits gesehen haben, gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$. Also erfüllt auch der Tangens $\tan(-x) = -\tan(x)$ und ist somit punktsymmetrisch im Ursprung.

Monotonie Da die erste Ableitung des Tangens $\frac{1}{cos(x)^2}$ ist und Quadrate immer positiv sind, ist die Ableitung also immer größer Null. Somit ist der Tangens auf ganz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend.

Verhalten im Unendlichen Es gilt

$$\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} \tan(h) = \frac{\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} \sin(h)}{\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} \cos(h)} = \frac{\sin(\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} h)}{\cos(\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} h)},$$

da beide Grenzwerte existieren. Also ist

$$\lim_{h \to \frac{\pi}{2}} \tan(h) = \infty.$$

Genauso sieht man

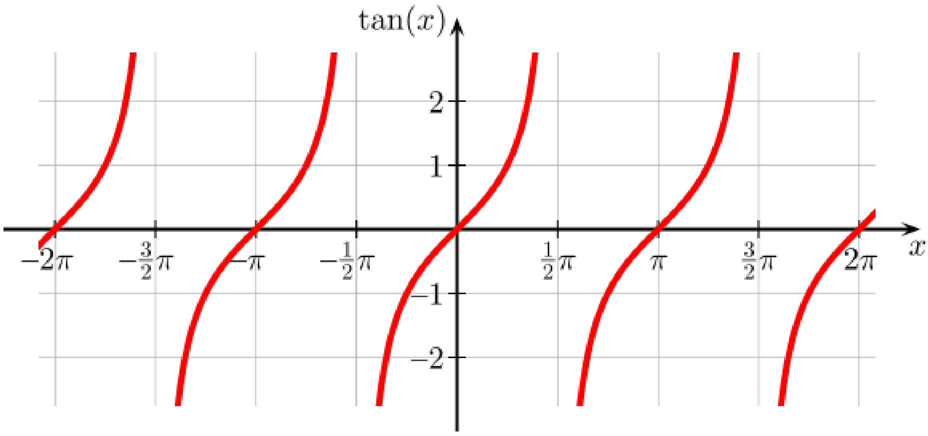
$$\lim_{h \to -\frac{\pi}{2}} \tan(h) = -\infty$$

ein.

Extremwerte Da die erste Ableitung des Tangens durch $\frac{1}{\cos(x)^2}$ gegeben ist und dieses nie Null wird, besitzt der Tangens keine Extremwerte.

Konvexität Die zweite Ableitung des Tangens berechnet sich zu $\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}$. Sie ist auf $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ negativ und auf $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv. Somit ist der Tangens auf $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ konkav und auf $(0, \frac{\pi}{2})$ konvex.

Es ergibt sich also ungefähr folgendes Bild des Graphen der Tangensfunktion.



4.3 Exponentialfunktion 1

Nachdem wir uns die letzten beiden Tage mit trigonometrischen Funktionen beschäftigt haben, soll es heute um die Exponentialfunktion gehen. Wie ihr aus der Schule bereits wisst, spielt die Exponentialfunktion für Wachstumsprozesse eine wichtige Rolle und wir werden dies später auch diskutieren. Zunächst benötigen wir allerdings einige Vorarbeiten.

Beispiel (Motivation: Stetige Verzinsung). *Wir erinnern uns an die allererste Vorlesung. Hier haben wir gesehen, dass wenn man eine Summe von S Euro für J Jahre auf der Bank anlegt und jährlich p Prozent Zinsen bekommt, diese Summe aber n Mal pro Jahr verzinst wird, man am Ende $S(1+\frac{p}{100n})^{nJ}$ Euro zurückerhält. Nun könnte man auf die Idee kommen, dass Geld täglich, stündlich, minütlich oder sogar sekündlich verzinsen zu lassen. In der Welt der Finanzen interessiert man sich daher für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A(1+\frac{p}{100n})^{nJ}$. Da A und J für die Existenz dieses Grenzwertes nur schmückendes Beiwerk sind, geht es also schlussendlich um $\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Dieser Grenzwert ist genau die Exponentialfunktin $\exp(x)$ und die vielen nützlichen, mathematischen Eigenschaften dieser Funktion haben dann Auswirkung auf die Finanzwirtschaft und betreffen uns somit alle.*

Lemma 36 (Monotoniekriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Angenommen es gibt eine natürliche Zahl m und eine reelle Zahl c, so dass für alle $n \geq m$ folgende zwei Eigenschaften gelten:*

- $a_n \leq c$
- $a_n \leq a_{n+1}$

Dann ist die Folge konvergent und der Grenzwert ist im Betrag $\leq c$.

Da wir die reellen Zahlen nie formal diskutiert haben, können wir diese Aussage nicht beweisen und nehmen sie im folgenden einfach an.

Lemma 37 (Bernoullische Ungleichung). *Sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten 1 und die Ungleichung ist sicherlich wahr. Sei nun die Aussage für n egzeigt und wir wollen sie auch für $n+1$ zeigen. Es ist:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &\geq 1+nx+x\\ &= 1+(n+1)x\end{aligned}$$

Hierbei verwendet die erste Ungleichung die Induktionsannahme und die Tatsache, dass nach Voraussetzung $(1+x) \geq 0$. $\square$

Lemma 38 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)**.** *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und seien $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ relle Zahlen. Dann gilt*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Beweis. Wir machen einen Induktionsbeweis, dessen Fall $n = 1$ trivialerweise gilt. Nun nehmen wir an, dass die Aussage für $n-1$ gezeigt ist und wollen sie ebenfalls für n als wahr beweisem. Weiterhin nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $x_n \geq x_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann gilt auch

$$x_n = \frac{(n-1)x_n}{n-1} \geq \frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}.$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folt nun

$$\left(\frac{\sum_{i \leq n} x_i}{n\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}}\right)^n = \left(1 + \frac{x_n - \frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}}{n\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}}\right)^n \geq 1 + \frac{x_n - \frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}}{\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}} = \frac{x_n}{\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}}.$$

Multiplikation mit $\left(\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}\right)^n$ liefert

$$(\frac{\sum_{i \leq n} x_i}{n})^n \geq \left(\frac{\sum_{i \leq n-1} x_i}{n-1}\right)^{n-1} \cdot x_n$$

und letzteres ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

womit der Beweis beendet ist. $\square$

Nun wenden wir diese Lemmata auf die Exponentialfunktion an.

Lemma 39. *Sei x eine reelle Zahl. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.*

Beweis. Um die Beschränktheit zu zeigen, wählen wir zunächst $n > x$. Aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel folgt dann mittels Invertieren

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{(1 + \frac{x}{n-x})^n \cdot 1} &= \sqrt[n+1]{(\frac{n}{n-x})^n \cdot 1} \\ &\geq \frac{n+1}{1 + n \cdot \frac{n-x}{n}} \\ &= 1 + \frac{x}{n+1-x} \end{aligned}$$

Sei nun $x \geq 0$. Für ein festes $n_0 > x$ ergibt sich somit für jedes weitere $n \geq n_0$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n - x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n_0 - x}\right)^{n_0}$$

und die Folge ist nach oben beschränkt.
Wenn wir $x \leq 0$ annehmen und $n > |x|$ wählen, so ist $0 \leq 1 + \frac{x}{n} \leq 1$ und deshalb haben wir die Abschätzung $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$. In jedem Fall ist die Folge also beschränkt.
Es sei nun $n > -x$. Dann ist $(1 + \frac{x}{n})$ positiv und aus der Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel folgt

$$\sqrt[n+1]{(1 + \frac{x}{n})^n \cdot 1} \leq \frac{1 + n(1 + \frac{x}{n})}{n + 1}.$$

Aber die rechte Seite der Ungleichung ist genau $1 + \frac{x}{n+1}$, also ist auch die zweite Bedingung des Monotoniekriteriums erfüllt.
Mit dem Monotoniekriterium folgt nun die gewünschte Konvergenz. $\square$

Definition 18. *Die Funktion* $\exp(x) := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *heißt Exponentialfunktion. Die Zahl* $e := \exp(1)$ *heißt eulersche Konstante.*

Obige Abschätzungen liefern $2 \leq e \leq 4$. Genauer gilt $e \approx 2,718\ldots$.
Zum Schluss der heutigen Vorlesung möchten wir noch eine Anwendung der Exponentialfunktion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung diskutieren.

Beispiel. *Sei* n *eine sehr große natürliche Zahl. Angenommen es werden* n *Münzen zufällig auf* n *Menschen verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit keine, eine oder mehr als eine Münze zu erhalten?*

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit die erste Münze zu erhalten ist $\frac{1}{n}$ und folglich geht man mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ leer aus. Die Wahrscheinlichkeit bei den ersten beiden Münzen leer auszugehen ist somit $(1 - \frac{1}{n})^2$ und die Wahrscheinlichkeit bei allen Verteilungen leer auszugehen ist $(1 - \frac{1}{n})^n$. Wenn n sehr groß ist, ist dies $\approx \frac{1}{e} \approx 0,37\ldots$, da wir morgen sehen werden, dass $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ gilt.
Mit der gleichen Argumentation ist die Wahrscheinlichkeit genau eine Münze zu erhalten $(1 - \frac{1}{n})^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = (1 - \frac{1}{n})^{n-1} \approx \frac{1}{e} \approx 0,37\ldots$.
Die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Münzen zu erhalten ist somit gegeben als $\approx 1 - 2 \cdot 0,37 = 0,26$. $\square$

4.4 Exponentialfunktion 2

Gestern haben wir uns bereits mit der Exponentialfunktion beschäftigt, deren Definition ich gleich wiederholen werde. Wir haben sie definiert und gesehen, dass zum Beispiel in der Finanzwirtschaft eine wichtige Rolle spielt. Heute möchten wir eine Kurvendiskussion der Exponentialfunktion tätigen und insbesondere ihre Ableitung bestimmen. Hier ist also nochmal die Definition der Exponentialfunktion:

Definition 19. *Die Funktion* $\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *heißt Exponentialfunktion. Die Zahl* $e := \exp(1)$ *heißt eulersche Konstante.*

Wir beginnen mit der Monotonie:

Lemma 40. *Die Exponentialfunktion ist (streng) monoton steigend.*

Beweis. Für den Moment zeigen wir nur, dass die Exponentialfunktion monoton steigend ist. Seien $x < y$ relle Zahlen. Dann ist auch $1+\frac{x}{n} < 1+\frac{y}{n}$. Somit ist ebenfalls $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ und im Grenzwert gilt immerhin noch $\leq$. Die strikte Ungleichung werden wir später anhand der Ableitung einsehen. □

Lemma 41. *Es gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Beweis. Es ist $\exp(-x)\cdot\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und da beides konvergente Folgen sind, können wir die rechte Seite als $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ berechnen. Nun gilt

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Für n genügend groß ist $0 < 1-\frac{x^2}{n^2} < 1$ und also gilt die selbe Aussage auch für $\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Andererseits liefert die Bernoullische Ungleichung

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1-n\cdot\frac{x^2}{x^2}$$

. Für n genügend groß ist also

$$1-\frac{x^2}{n} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

und da die äußeren beiden Terme konvergieren mit Grenzwert 1, gilt dies auch für den mittleren Term.
Da $\frac{1}{\exp(x)}$ die einzige Zahl mit $\exp(x)\cdot\frac{1}{\exp(x)} = 1$ ist, muss also wie behauptet $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ gelten. □

Lemma 42. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$. Von den folgenden Ungleichungen gilt die linke für beliebiges x und die rechte für $x < 1$:*

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ haben wir $1 + \frac{x}{n} > 0$ und somit auch $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$. Da die Folge, deren Grenzwert $\exp(x)$ ist, monoton wachsend ist, gilt also auch für den Grenzwert, dass er echt größer als Null ist.
Hieraus folgt schon direkt, dass $1+x \leq \exp(x)$ für alle $x \leq -1$. Falls $x \geq -1$, so ist auch $\frac{x}{n} \geq -1$ und aus der Bernoullischen Ungleichunge angwendet auf $\frac{x}{n}$ folgt dann $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$. Im Grenzwert folgt die Behauptung.
Sei nun schließlich $x < 1$. Einsetzen von $-x$ in die schon gezeigte Ungleichung ergibt $1 - x \leq \exp(-x)$. Da $1 - x$ positiv ist, erhalten wir nach Invertieren und unter Verwendung des vorigen Lemmas die gewünschte Ungleichung. □

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist die folgende.

Satz 21. *Für alle reellen Zahlen x und y gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Da die Folgen $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ konvergieren, konvergiert auch deren Produkt. Diese berechnet sich zu

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{xy}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n.$$

Wir müssen also zeigen, dass die Folge $\left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n$ konvergiert und dass ihr Grenzwert eins ist. Der Einfachheit-halber nehmen wir nun an, dass $xy < 0$ ist (der andere Fall lässt sich mit sehr ähnlichen Methoden behandeln). Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung

$$1 \geq \left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n \geq 1 + \frac{xy}{n+x+y}.$$

Da letzteres eine konvergente Folge mit Grenzwert 1 ist, folgt aus dem Sandwichlemma, dass die von uns gewünschte Aussage gilt. □

Nun können wir die Ableitung der Exponentialfunktion bestimmen.

Satz 22. *Die Exponentialfunktion ist differenzierbar und es gilt*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Beweis. Nach Definition ist $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$ auf Konvergenz zu prüfen und zu berechnen. Aufgrund des obigen Satzes zur Multiplikativität der Exponentialfunktion gilt

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h)-1}{h}.$$

Da $\exp(x)$ nicht von h abhängt, können wir den Faktor aus dem Grenzwert herausziehen und müssen also zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1.$$

Unter Verwendung der beiden Abschätzungen, die wir vorhin bewiesen haben, sieht man dies folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1-h}-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{1-h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Da wir bereits wissen, dass die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, folgt auch sofort, dass sie streng monoton wachsend ist.
Zusammenfassend ergibt sich also für die Kurvendiskussion folgendes Bild:

Nullstellen Wie wir bereits gesehen haben, hat die Funktion $f(x) = \exp(x)$ keine Nullstellen. Genauer gilt $exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Symmetrie Wegen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ist die Funktion weder achsensymmetrisch, noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Monotonie Da die erste Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist und da diese immer strikt positiv ist, ist die Exponentialfunktion streng monoton steigend.

Verhalten im Unendlichen Wegen $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$ für alle $x < 1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = 0$. Wegen $\exp(x) \geq 1 + x$ ist die Exponentialfunktion unbeschränkt.

Extremwerte Da die erste Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist und da diese immer strikt positiv ist, besitzt die Exponentialfunktion keine Extremwerte.

Konvexität Da die zweite Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist und da diese immer strikt positiv ist, ist die Exponentialfunktion konvex auf ganz $\mathbb{R}$.

Zusammen mit $\exp(0) = 1$ ergibt sich somit folgendes Bild des Graphen.