

Blatt 1

Wenn nicht anders angegeben verwenden alle Aufgaben den tropischen Halbring $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, mit $x \oplus y = \min(x, y)$ und $x \odot y = x + y$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung.

- (a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.
- (b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $p(x)$ ein tropisches Polynom gilt p ist konkav, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$p\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \geq \frac{1}{2}(p(x) + p(y)).$$

Aufgabe 2.

- (a) Sei $p(x) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c$ ein quadratisches tropisches Polynom über $\mathbb{R}$. Zeichnen Sie den Graphen zu p für $a = 2, b = 0, c = 3$. An welchen Punkten $(x, p(x))$ des Graphen findet ein Wechsel der linearen Teile von p statt? Wie sehen diese Punkte für allgemeine $a, b, c \in \mathbb{R}$ aus?
- (b) Sei $p(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \dots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$ ein tropisches Polynom über $\mathbb{R}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $0 \leq i \leq n$. Berechnen Sie $V(p)$.

Aufgabe 3. Sei $p(x, y) = x^2 \oplus y^2 \oplus 1$ eine tropische quadratische Funktion über $\mathbb{R}^2$. Visualisieren Sie $V(p)$ und geben für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Werte von p explizit an.