

Blatt 2

Aufgabe 1. (Bewertungen)

- (a) Sei K ein Körper. Zeigen sie, dass

$$\text{val} \left(t^n \cdot \frac{p(t)}{q(t)} \right) = n,$$

für $p \in K[t]$, $q \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $p(0), q(0) \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$, eine Bewertung auf dem Körper der rationalen Funktionen $K(t)$ definiert.

- (b) Sei (K, val) ein bewerteter Körper. Zeigen sie:

- (i) Es gilt $\text{val}(1) = 0$ und $\text{val}(-b) = \text{val}(b)$ für $b \in K$.
- (ii) Es gilt $\text{val}(a + b) = \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$, falls $a \neq b$.
- (iii) Der Bewertungsring R_{val} ist ein lokaler Ring.

- (c) Zeigen sie, ist (K, val) ein bewerteter Körper und algebraisch abgeschlossen, so ist der Residuenkörper $\mathbb{k}$ von K ebenfalls algebraisch abgeschlossen. Geben sie ein Beispiel für die Situation, dass $\mathbb{k}$ algebraisch abgeschlossen ist, aber K nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. (Diskrete Bewertungen) Eine Bewertung val auf einem Körper K heisst *diskret*, falls $\Gamma_{\text{val}} \cong \mathbb{Z}$. Zeigen sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) Die Bewertung val ist diskret.
- (b) Der Bewertungsring R_{val} ist ein Hauptidealring.
- (c) Der Bewertungsring R_{val} ist noethersch.
- (d) Das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{\text{val}}$ ist ein Hauptideal.

Aufgabe 3. (Puisseux Reihen) Sei K algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(K) = 0$. Zeigen sie, dass der Körper der Puiseux Reihen $K\{\{t\}\}$ algebraisch abgeschlossen ist. Zeigen sie hierfür das ein beliebiges normiertes Polynom

$$P(X) = X^n + a_1(t)X^{n-1} + \dots + a_n(t) \in K\{\{t\}\}[X]$$

reduzierbar ist.

Hinweis: Führen sie zuerst eine affine Koordinatentransformation durch, damit mindestens ein Koeffizient von $P(X)$ verschwindet. Führen sie dann eine Variablentransformation durch so dass sie $P(Y) = t^k \cdot Q(Y)$ schreiben können, mit $k \in \mathbb{Q}$ und $Q(Y)$ ein Polynom dessen Koeffizienten alle nicht-negative Bewertung haben und mindestens ein Koeffizient mit Bewertung 0. Zeigen Sie dann die Aussage in dem sie folgende Aussage annehmen:

Hensel's Lemma. Sei R_{val} der Bewertungsring von $K\{\{t\}\}$ und $\mathbb{k}$ der Residuenkörper. Sei $Q(x) \in R_{\text{val}}[x]$ ein Polynom für dessen Reduktion in $\mathbb{k}[x]$ gilt $\overline{Q}(x) = \overline{R}_1(x)\overline{R}_2(x)$, wobei $\overline{R}_1(x)$ und $\overline{R}_2(x)$ teilerfremd sind. Dann existieren $R_1(x), R_2(x) \in R_{\text{val}}[x]$ mit $Q(x) = R_1(x)R_2(x)$.