Geometrische und kombinatorische Darstellungstheorie Dr. Michael Ehrig
Köln 2016 Lara Bossinger

Blatt 3

Aufgabe 1. (Tropische Algebra) In dieser Aufgabe arbeiten wir über dem tropischen Halbring $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Sei $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_0$ ein tropisches Polynom. Ein Koeffizient a_i von f heißt *Mindestkoeffizient* von f, falls es ein x_0 gibt mit $f(x_0) = a_i + ix_0$. Ein tropisches Polynom heißt *Mindestkoeffizientenpolynom*, falls alle Koeffzienten Mindestkoeffizienten sind.

(a) Zeigen sie, für zwei Mindestkoeffizientenpolynome f und g, dass gilt $f = g$ genau dann wenn f und g äquivalent sind als Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x)$).

(b) Zeigen sie, dass für jedes beliebige tropische Polynom $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_0$ gilt, dass genau ein Mindestkoeffizientenpolynom $g(x) = b_n x^n \oplus b_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus b_0$ existiert mit

$$b_j = \min\left(\{a_j\} \cup \left\{ \ \tfrac{a_i(k-j)+a_k(j-i)}{k-i} \ \middle|\ 0 \leq i < j < k \leq n \ \right\}\right).$$

(c) Zeigen sie, dass ein tropisches Polynom $f(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_0$ genau dann ein Mindestkoeffizientenpolynom ist, wenn gilt

$$d_n \leq d_{n-1} \leq \cdots \leq d_1,$$

wobei $d_i = a_{i-1} - a_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(d) Beweisen sie die tropische Variante des Fundamentalsatzes der Algebra. Mit anderen Worten also, jedes tropische Polynom $f(x)$ lässt sich, gesehen als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ eindeutig schreiben als tropisches Produkt von linearen tropischen Polynomen.

Aufgabe 2. (Grassmann Varietät) Es bezeiche $\mathcal{P}_k(n)$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Sei $\mathbb{C}[p_I \mid I \in \mathcal{P}_k(n)]$ der Polynomring mit Koordinatenfunktionen indiziert durch die k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Setze

$$\mathrm{I}_{k,n} = \langle P_{I,J} \mid I \in \mathcal{P}_{k-1}(n), J \in \mathcal{P}_{k+1}(n) \rangle \ \text{ mit } P_{I,J} = \sum_{j \in J} (-1)^{\mathrm{sign}(j,I,J)} p_{I \cup \{j\}} \cdot p_{J \setminus \{j\}},$$

wobei $\mathrm{sign}(j, I, J) = \#\{j' \in J \mid j' < j\} + \#\{i \in I \mid j < i\}$ und $p_{I \cup \{j\}} = 0$ falls $j \in I$. Zeigen sie, dass die Abbildung aus der Vorlesung

$$\Phi_{k,n} : \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(k, n) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\binom{n}{k}-1},$$

eine Bijektion zwischen $\mathrm{Gr}(k, n)$ und $\mathcal{V}(\mathrm{I}_{k,n})$ definiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\Phi_{k,n}$ injektiv ist und eine Inklusion $\mathrm{Gr}(k, n) \subset \mathcal{V}(\mathrm{I}_{k,n})$ definiert. Konstruieren sie dann zu jedem Punkt in $\mathcal{V}(\mathrm{I}_{k,n})$ ein Urbild.

Aufgabe 3. (Affinisierungen und Homogenisierungen) Finden sie ein Beispiel für ein Ideal $\mathrm{I} \subset \mathrm{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ für das $\mathrm{I}_{\mathrm{aff}}$ echt mehr Erzeuger benötigt als I und weiterhin $\mathrm{I}_{\mathrm{proj}}$ echt mehr Erzeuger als $\mathrm{I}_{\mathrm{aff}}$.

Abgabe am Di. 03.05.2016 in der Vorlesung