Geometrische und kombinatorische Darstellungstheorie Dr. Michael Ehrig
Köln 2016 Lara Bossinger

Blatt 4

Aufgabe 1. (Reguläre Unterteilungen) Sei $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset \mathbb{R}^n$ eine geordnete Teilmenge und $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_r) \in \mathbb{R}^r$ ein Gewichtsvektor.

(a) Zeigen sie, dass die durch w definierte reguläre Unterteilung von $\{u_1, \ldots, u_r\}$ einen Fächer definiert.

(b) Zeigen sie, dass die durch w definierte reguläre Unterteilung von $\mathrm{P} = \mathrm{conv}(u_1, \ldots, u_r)$ einen polyedrische Komplex definiert.

(c) Sei $v_i = (u_i, \mathrm{w}_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\mathrm{P_w} = \mathrm{conv}(v_i \mid 1 \leq i \leq r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

das durch die v_i definierte Polytop. Eine Seite F von $\mathrm{P_w}$ heisst untere Seite, falls ein $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$ existiert mit $\mathrm{face_c}(\mathrm{P_w}) = F$ und $\mathrm{c}_{n+1} > 0$. Sei π von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten. Zeigen sie, dass

$$\Sigma(\mathrm{P}) = \{\pi(F) \mid F \text{ ist untere Seite von } \mathrm{P_w}\},$$

mit der durch w induzierten regulären Unterteilung übereinstimmt.

Aufgabe 2. (Reguläre Unterteilungen des Würfels) Klassifizieren sie alle regulären Unterteilungen des dreidimensionalen Würfels

$$\mathrm{C} = \mathrm{conv}\left((0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\right).$$

Aufgabe 3. (Schnitte von Bewertungen) Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und setze

$$\mathrm{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n)$$

die Vereinigung aller Körper rationaler Funktionen in endlich vielen Variablen.

(a) Zeigen sie, dass es eine Bewertung val auf K gibt so dass: $\mathrm{val}(a) = 0$ für $a \in \mathbb{F}$ und $\mathrm{val}(x_j) = \frac{1}{j}$.

(b) Zeigen sie, dass die Bewertungsgruppe Γ_{val} genau $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Zeigen sie, val besitzt keinen Schnitt.

Aufgabe 4. (Tropische Hyperfläche) Es sei $\mathrm{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ der Körper der Puiseaux-Reihen über $\mathbb{C}$. Bestimmen sie, im $\mathbb{R}^2$ die Tropisierung der Hyperfläche

$$\mathcal{V}(f) \text{ für } f(x,y) = t^2x^2 + 5t^2xy - 7t^{-1}y^2 + 8tx - t^2y + t.$$

Abgabe am Di. 10.05.2016 in der Vorlesung