Blatt 5

Aufgabe 1. (Initialideale für Laurent Polynomringe) Sei I ein Ideal in $\mathcal{R}_n$, dem Laurent Polynomring in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$. Für $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ seien Initialideal $\text{in}_\mathbf{w}(I)$ und die Initialform $\text{in}_\mathbf{w}(f)$ für $f \in I$ gleich definiert wie für den Fall des Polynomrings. Zeigen sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $f \in \mathcal{R}_n$ existiert $U \subset \mathbb{R}^n$ dicht so dass $\text{in}_\mathbf{w}(f)$ eine Einheit ist für alle $\mathbf{w} \in U$.

(b) Für $g \in \text{in}_\mathbf{w}(I)$ gilt, es existiert $h \in I$ mit $g = \text{in}_\mathbf{w}(h)$.

(c) Angenommen es existiert $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\text{in}_\mathbf{v}(\text{in}_\mathbf{w}(I)) = \text{in}_\mathbf{w}(I)$. Zeigen sie, $\text{in}_\mathbf{w}(I)$ ist homogen bezüglich der Graduierung gegeben durch $\deg(x_i) = \mathbf{v}_i$.

(d) Für $f, g \in \mathcal{R}_n$ gilt $\text{in}_\mathbf{w}(fg) = \text{in}_\mathbf{w}(f)\text{in}_\mathbf{w}(g)$.

Aufgabe 2. (Flachheit) Zeigen sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $R = \mathrm{K}[t]/(t^2)$ und M ein R-Modul. Dann gilt, M ist flach genau dann wenn die Multiplikation mit t einen Isomorphismus induziert zwischen M/tM und tM.

(b) Sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$ kein Nullteiler. Für einen flachen R-Modul M gilt, dass Multiplikation mit a auf M trivialen Kern hat.

(c) Sei R ein kommutativer Hauptidealring. Dann gilt M ist flach genau dann wenn M torsionsfrei ist.

Aufgabe 3. (Invariante Ideale) Sei K ein Körper der Charakteristik Null und $\mathcal{S}_n = \mathrm{K}[x_1, \dots, x_n]$ mit Rechtswirkung von $GL_n(\mathrm{K})$ definiert via

$$(p.g)(v) = p(g \cdot v) \text{ für alle } p \in \mathcal{S}_n, v \in \mathrm{K}^n \text{ und } g \in GL_n(\mathrm{K}).$$

Wir sagen ein Teilmenge U von $\mathcal{S}_n$ ist stabil unter einem Element $g \in GL_n(\mathrm{K})$ falls $U.g = U$ als Menge gilt. Wir bezeichnen mit D_n die Untergruppe der Diagonalmatrizen von $GL_n(\mathrm{K})$ und mit B_n die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Beweisen sie folgende Aussagen:

(a) Ein Ideal $I \neq \{0\}$ von $\mathcal{S}_n$ ist genau dann monomial falls es stabil ist unter D_n.

(b) Ein Ideal $I \neq \{0\}$ von $\mathcal{S}_n$ ist genau dann stabil unter $GL_n(\mathrm{K})$, falls es ein $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt mit $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle^d$.

(c) Ein Ideal $I \neq \{0\}$ von $\mathcal{S}_n$ ist genau dann stabil unter B_n, falls es monomial ist und für jedes Monom $m \in I$ und x_j mit x_j teilt m gilt $m\frac{x_i}{x_j} \in I$ für $i < j$.

Abgabe am Di. 24.05.2016 in der Vorlesung