Geometrische und kombinatorische Darstellungstheorie Köln 2016

Dr. Michael Ehrig
Lara Bossinger

Blatt 6

Aufgabe 1. (Tropische Kubiken) Unter einer tropischen Kubik $\mathcal{V}_{\text{trop}}(F)$ verstehen wir die tropische Varietät assoziiert zu einem tropischen Polynom F vom Grad 3 in zwei Unbestimmten. Wir sagen dass $\mathcal{V}_{\text{trop}}(f)$ *glatt* ist, falls der zugehörige polyedrische Komplex genau 9 Zellen der Dimension Null, genannt Ecken, enthält. Angenommen $\mathcal{V}_{\text{trop}}(f)$ ist glatt, zeigen sie dass $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{V}_{\text{trop}}(f)$ eine eindeutige beschränkte Teilmenge entält mit drei bis neun Ecken im Abschluss. Geben sie Beispiele für die Fälle mit drei, sechs und neun Ecken.

Aufgabe 2. (Initialideale) Sei $\mathrm{K} = \mathbb{Q}$ mit 2-adischer Bewertung und $\Bbbk = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Eine Gerade $\mathcal{V}(\mathrm{I})$ in $\mathbb{P}^3_{\mathrm{K}}$ sei gegeben durch

$$\mathrm{I} = \langle x_0 + 2x_1 - 3x_2, 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rangle.$$

Berechnen sie $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I})$ für $\mathbf{w} = (0,0,0,0)$ und $\mathbf{w} = (1,0,0,1)$. Bestimmen sie die Hilbertfunktionen für I und $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I})$? Was folgt daraus für die Dimension der projektiven Varietäten $\mathcal{V}(\mathrm{I})$ und $\mathcal{V}(\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I}))$?

Aufgabe 3. (Monomialideale) Im folgenden sei $\mathrm{S} = \mathrm{K}[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über einem Körper K. Ein Ideal $\mathrm{I} \subset \mathrm{S}$ heisst *artinsch*, falls S/I Krull Dimension Null hat. Für ein Ideal $\mathrm{I} = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{J}_i$ mit J_i Primärideal, heissen die Primideale $\sqrt{\mathrm{J}_i}$ die zu I *assoziierten Primideale.*

(a) Sei I ein monomiales Ideal. Zeigen sie, I ist artinsch genau dann wenn für das Radikal von I gilt $\sqrt{\mathrm{I}} = (x_1, \dots, x_n)$.

(b) Sei I ein monomiales artinsches Ideal. Zeigen sie, S/I ist endlich dimensional mit Basis gegeben durch Monome die nicht in I enthalten sind, genannt Standard Monome zu I.

(c) Sei $\mathcal{T}$ eine unendliche Menge monomialer artinscher Ideale in S. Zeigen sie, es existieren $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathcal{T}$ mit $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$.
Tipp: Für einen Widerspruch benutzen sie Teil (b) um eine unendliche aufsteigende Kette von Idealen zu generieren.

(d) Sei $\mathcal{T}$ eine unendliche Menge monomialer artinscher Ideale in S. Zeigen sie, es existiert eine unendliche absteigende Kette $\mathrm{I}_1 \supsetneq \mathrm{I}_2 \supsetneq \mathrm{I}_3 \supsetneq \dots$ von Idealen in $\mathcal{T}$.

(e) Zeigen sie, ist I ein monomiales Ideal, so ist ein zu I assoziiertes Primideal ebenfalls monomial.

(f) Sei $\mathcal{R}$ eine unendliche Menge monomialer Ideale in S. Zeigen sie, es existieren $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathcal{R}$ mit $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$.
Tipp: Verwenden sie Primärzerlegungen von Idealen und das diese minimal gewählt werden können. Überlegen sie weiterhin warum es nur endlich viele monomiale Primideale gibt.

Abgabe am Di. 31.05.2016 in der Vorlesung