Geometrische und kombinatorische Darstellungstheorie Dr. Michael Ehrig
Köln 2016 Lara Bossinger

Blatt 7

Aufgabe 1. (Monomiale Initialideale) Sei K ein bewerteter Körper und I ein homogenes Ideal in $\mathrm{K}[x_0, \dots, x_n]$. Zeigen sie, dass $\{\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I}) \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I}) \text{ monomial}\}$ endlich ist.

Aufgabe 2. (Matrizen und Bewertungen) Seien $s \geq r$ positive ganze Zahlen und K ein bewerteter Körper. Für ein $A \in M_{r,s}(\mathrm{K})$ und $J \subset \{1, \dots, s\}$ mit $|J| = r$ bezeichnen wir mit A^J die Matrix in $M_{r,r}(\mathrm{K})$ die aus den Spalten besteht die durch die Menge J indiziert sind. Sei nun $A \in M_{r,s}(\mathrm{K})$ eine Matrix maximalen Ranges. Zeigen sie, für jedes $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^s$ existiert ein $U = U(\mathbf{w}) \in \mathrm{Gl}_r(\mathrm{K})$ und eine r-elementige Teilmenge $J = J(\mathbf{w}) = \{k_1, \dots, k_r\} \subset \{1, \dots, s\}$ so dass $(UA)^J$ die Einheitsmatrix ist und $\mathrm{val}((UA)^J_{ij}) + \mathbf{w}_j \geq \mathbf{w}_{k_i}$ für $j \notin J$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\overline{\mathbb{R}}$ den tropischen Halbring der reellen Zahlen (vereinigt mit $\{\infty\}$). Zu $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n}(\overline{\mathbb{R}})$ *assoziieren wir den gerichteten Graphen* $\mathcal{G}(A)$. Die Eckenmenge von $\mathcal{G}(A)$ ist die Menge $\{1, \dots, n\}$ und es existiert eine gerichtete Kante mit Gewicht $a_{i,j}$ von i nach j falls $a_{i,j} < \infty$. Wir sagen dass $\mathcal{G}(A)$ *stark zusammenhängend* ist, falls es einen gerichteten Pfad von jeder Ecke zu jeder anderen Ecke gibt. Die *normalisierte Länge* eines gerichteten Pfades ist die Summe aller Gewichte der Kanten des Pfades dividiert durch die Anzahl der Kanten.

Aufgabe 3. (Tropische Matrizen und Graphen) Sei $B \in M_{n,n}(\overline{\mathbb{R}})$ so dass $\mathcal{G}(B)$ keine Zykel besitzt mit negativer normierter Länge und es sei

$$B^+ = B \oplus B^2 \oplus B^3 \oplus \ldots \oplus B^n.$$

Beweisen sie, $B^+_{i,j}$ ist die Länge des kürzesten Pfades von i nach j.

Aufgabe 4. (Tropische Eigenwerte) Mit der offensichtlichen Definition von Matrixmultiplikation sagen wir das $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in M_{n,n}(\overline{\mathbb{R}})$ ist, falls gilt

$$A \odot \mathbf{v} = \lambda \odot \mathbf{v},$$

für ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen sie, nicht jede tropische Matrix besitzt einen Eigenwert.

(b) Zeigen sie, falls $\mathcal{G}(A)$ stark zusammenhängend ist, so besitzt A einen Eigenwert $\lambda(A)$. *Tipp: Definieren sie $\lambda(A)$ als das Minimum der normalisierten Längen von gerichteten Zykeln in $\mathcal{G}(A)$. Wenden sie Aufgabe 3 and auf die Matrix die $\lambda(A)$ von jedem Eintrag von A abzieht.*

(c) Zeigen sie, ist $\mathcal{G}(A)$ stark zusammenhängend, so besitzt A genau einen Eigenwert.

Abgabe am Di. 07.06.2016 in der Vorlesung