

Blatt 8

Aufgabe 1. (Urbilder und Projektionen) Sei X eine sehr affine Varietät in T^n mit Verschwindungsideal $I = I_X \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Es gelte $\lambda e_n \in \text{trop}(X)$ für $\lambda \gg 0$ wobei e_n der n -te Basis Vektor in der gewählten Basis ist.

- (a) Zeigen sie, I enthält ein Element der Form $1 + \sum_{i=1}^s f_i x_n^i$ für $f_i \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$.
- (b) Sei $\pi : T^n \rightarrow T^{n-1}$ die kanonische Projektion entlang der letzten Variable. Zeigen sie, für $y \in \pi(X)$ gilt, dass $\pi^{-1}(y)$ endlich ist.

Aufgabe 2. (Sternfächer) Sei Σ ein polyedrischer Komplex in $\mathbb{R}^n$ und $\sigma \in \Sigma$ eine Zelle. Zeigen sie, für ein beliebiges $\mathbf{w} \in \overset{\circ}{\sigma}$ und ein $\tau \in \Sigma$ mit $\sigma \subset \tau$ gilt für $\tilde{\tau} \in \text{star}_{\Sigma}(\sigma)$

$$\tilde{\tau} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \epsilon > 0 \text{ mit } \mathbf{w} + \epsilon \mathbf{v} \in \tau\} + L_{\sigma},$$

wobei L_{σ} den linearen Spann von σ bezeichnet.

Aufgabe 3. (Idealquotienten und Sättigung) Sei $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Der *Idealquotient* von I nach f ist definiert als

$$(I : f) = \{g \mid gf \in I\}.$$

Die *Sättigung* von I bezüglich f ist definiert als

$$(I : f^{\infty}) = \{g \mid gf^k \in I \text{ für ein } k > 0\}.$$

- (a) Zeigen sie, dass $(I : f^{\infty})$ und $(I : f^k)$ Ideale sind für alle $k \in \mathbb{N}$ und das weiterhin gilt $(I : f^{\infty}) = (I : f^N)$ für ein $N \gg 0$.
- (b) Sei speziell $e_n = \prod_{i=1}^n x_i$ gegeben. Zeigen sie, dass I ein Monom enthält, genau dann wenn $1 \in (I : e_n^{\infty})$.

Aufgabe 4. (Tropisierung von Morphismen) Sei $\Phi : T^n \rightarrow T^m$ ein Morphismus von Tori über einem bewerteten Körper.

- (a) Zeigen sie, dass für $x \in T^n$ gilt $\text{val}(\Phi(x)) = \text{trop}(\Phi)(\text{val}(x))$.
- (b) Sei I ein Ideal in $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ und $I' = (\Phi^*)^{-1}(I)$. Zeigen sie, dass aus $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \neq \langle 1 \rangle$ folgt $\text{in}_{\text{trop}(\Phi)(\mathbf{w})}(I') \neq \langle 1 \rangle$.