Aufgabe 1 (16 Punkte)

Vorgelegt sei folgende von $c \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix:

$$A_c := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & c & -1 \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

(i) Ermitteln Sie, für welche c sich die Cholesky-Faktorisierung von A_c durchführen läßt.

(ii) Führen Sie für die in (i) ermittelten c die Cholesky-Faktorisierung von A_c durch.

(iii) Sei außerdem der Vektor $b := \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$(\mathcal{L}_c) \qquad A_c x = b$$

für $c = 4$, indem Sie die Cholesky-Faktorisierung aus (ii) benutzen.

Welche anderen Lösungsmöglichkeiten für $(\mathcal{L}_4)$ hätten wir alternativ verwenden können ? (Hier genügt es, wenn Sie die Verfahren benennen.)

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(\mathcal{L}) \qquad Ax = b$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 19 & 20 & 1 \\ 19 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

(i) Wie groß darf man $\| \triangle b \|_1$ wählen, damit für die Lösung $\tilde{x}$ des gestörten Systems

$$(\tilde{\mathcal{L}}) \qquad A\tilde{x} = b + \triangle b$$

garantiert ist, daß

$$\frac{\| x - \tilde{x} \|_1}{\| x \|_1} \leq \; 10^{-3} \; ?$$

(ii) Wie groß darf man $\| \triangle A \|_1$ wählen, damit für die Lösung $\hat{x}$ des gestörten Systems

$$(\hat{\mathcal{L}}) \qquad (A + \triangle A)\hat{x} = b$$

garantiert ist, daß

(a) $\hat{x}$ existiert und eindeutig bestimmt ist,

(b) $\frac{\|x-\hat{x}\|_1}{\|x\|_1} \leq \; 10^{-1}$ ausfällt ?

Wie würden Sie die Sensitivität von $(\mathcal{L})$ gegenüber Rundungs- und anderen Datenfehlern in A einschätzen ?

Bitte wenden !

Aufgabe 3 (22 Punkte)

(i) Vorgelegt sei das folgende lineare Optimierungsproblem (im $\mathbb{R}^4$):

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \text{unter} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein globales Maximum sowie den maximalen Zielfunktionswert von $(\mathcal{P}_1)$.

Tip: Finden Sie zunächst eine zulässige Startbasis durch Berechnung einer zulässigen Ecke.

(ii) Untersuchen Sie, ob das lineare Optimierungsproblem (im $\mathbb{R}^3$)

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq -3 \\ & -2x_1 - x_3 \geq -4 \\ & x_2 + 3x_3 \geq -1 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt, indem Sie $(\mathcal{P}_2)$ auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus verwenden.

Aufgabe 4 (27 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{aligned} \min \quad & f(x) := x_3^2 \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^3) \\ \text{unter} \quad & h(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 = 0 \\ & g(x) := x_1^2 + x_2^2 - 4 \geq 0. \end{aligned}$$

Wir sind an lokalen und globalen Minima des Problems $(\mathcal{P})$ interessiert.

(i) Werten Sie eine für $(\mathcal{P})$ geeignete *notwendige Optimalitätsbedingung erster Differentiationsordnung* (mit Gradienten) aus.

(ii) Untersuchen Sie die Anwendbarkeit einer *hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Differentiationsordnung*. Weisen Sie nach, daß die erforderliche (verschärfte) Matrixbedingung verletzt ist.

(iii) Argumentieren Sie angesichts von (ii) für die "Kandidaten" x^* aus (i) geometrisch. Tragen Sie diese hierbei in einer Skizze ein, welche auch die gesamte zulässige Menge von $(\mathcal{P})$ enthält.

Welche Kandidaten sind lokale, welche sogar strikt lokale oder globale Minima ?

Wie lautet der minimale Wert von f ?