

Klausur zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Vorgelegt sei folgende von $c, d \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix:

$$A_{c,d} := \begin{pmatrix} 1 & d & c \\ 0 & 4 & d \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Ermitteln Sie, für welche c, d sich die Cholesky-Faktorisierung von $A_{c,d}$ durchführen läßt.
- (ii) Führen Sie für die in (i) ermittelten c, d die Cholesky-Faktorisierung von $A_{c,d}$ durch.
- (iii) Sei außerdem der Vektor $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$(\mathcal{L}_{c,d}) \quad A_{c,d}x = b$$

für $c = 1/\sqrt{2}, d = 0$, indem Sie die Cholesky-Faktorisierung aus (ii) benutzen.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

- (i) Bestimmen Sie eine Lösung des folgenden linearen Optimierungsproblems (im \mathbb{R}^3)

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{ll} \min & 6x_1 + x_2 \\ \text{unter} & -x_1 + x_3 \geq -1 \\ & x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0, \end{array}$$

indem Sie (\mathcal{P}_1) auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus verwenden. Nennen Sie auch den minimalen Zielfunktionswert.

- (ii) Vorgelegt sei das folgende lineare Optimierungsproblem (im \mathbb{R}^4):

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{unter} & x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ & x_2 - 3x_4 = 1 \\ & -x_3 + 3x_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie ein globales Maximum sowie den maximalen Zielfunktionswert von (\mathcal{P}_2) .

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \min f(x) := \sin(x_3) && (x \in \mathbb{R}^3) \\ & \text{unter } h(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir sind an lokalen und globalen Minima des Problems (\mathcal{P}) interessiert.

- (i) Werten Sie eine für (\mathcal{P}) geeignete *notwendige Optimalitätsbedingung erster Differentiationsordnung* (mit Gradienten) aus.
- (ii) Untersuchen Sie die Anwendbarkeit einer *hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Differentiationsordnung*. Weisen Sie nach, daß die erforderliche (verschärfte) Matrixbedingung verletzt ist.
- (iii) Argumentieren Sie angesichts von (ii) für die „Kandidaten“ x^* aus (i) geometrisch. Tragen Sie diese hierbei in einer Skizze ein, welche auch die gesamte zulässige Menge von (\mathcal{P}) enthält.

Welche Kandidaten sind lokale, welche sogar strikt lokale oder globale Minima, welche (im entsprechenden Sinne) Maxima ?

Wie lautet der minimale Wert von f ?

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Vorgelegt sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 - \cos(x_2) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

- (i) Untersuchen Sie f auf Konvexität.
- (ii) Verwenden Sie zur approximativen Lösung des Problems der Minimierung von f die Methode des steilsten Abstiegs, indem Sie den Algorithmus in $(0, 0)$ starten und als Abbruchkriterium $\|\nabla f(x)\|_\infty < 1/100$ verwenden.

Deuten Sie die Situation, welche Sie beim Abbruch vorfinden.

- (iii) Welches quadratische (Taylor-) Polynom beschreibt f in der Nähe von $(1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ besonders gut ?

Welches weitere Verfahren bezieht solche Informationen „zweiter Ordnung“ mit ein ? (Hier genügt ein „berühmtes Beispiel“.)