MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001

12.2.2001

Klausur zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Vorgelegt sei folgende von $c, d \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix:

$$A_{c,d} := \begin{pmatrix} 1 & d & c \\ 0 & 4 & d \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Ermitteln Sie, für welche c, d sich die Cholesky-Faktorisierung von $A_{c,d}$ durchführen läßt.

(ii) Führen Sie für die in (i) ermittelten c, d die Cholesky-Faktorisierung von $A_{c,d}$ durch.

(iii) Sei außerdem der Vektor $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$(\mathcal{L}_{c,d}) \qquad A_{c,d}x = b$$

für $c = 1/\sqrt{2}, d = 0$, indem Sie die Cholesky-Faktorisierung aus (ii) benutzen.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(i) Bestimmen Sie eine Lösung des folgenden linearen Optimierungsproblems (im $\mathbb{R}^3$)

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \begin{array}{rl} \min & 6x_1 + x_2 \\ \text{unter} & -x_1 + x_3 \geq -1 \\ & x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0, \end{array}$$

indem Sie $(\mathcal{P}_1)$ auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus verwenden. Nennen Sie auch den minimalen Zielfunktionswert.

(ii) Vorgelegt sei das folgende lineare Optimierungsproblem (im $\mathbb{R}^4$):

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{unter} & x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ & x_2 - 3x_4 = 1 \\ & -x_3 + 3x_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie ein globales Maximum sowie den maximalen Zielfunktionswert von $(\mathcal{P}_2)$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{rl} \min & f(x) := \sin(x_3) \\ \text{unter} & h(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0. \end{array} \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

Wir sind an lokalen und globalen Minima des Problems $(\mathcal{P})$ interessiert.

(i) Werten Sie eine für $(\mathcal{P})$ geeignete *notwendige Optimalitätsbedingung erster Differentiationsordnung* (mit Gradienten) aus.

(ii) Untersuchen Sie die Anwendbarkeit einer *hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Differentiationsordnung*. Weisen Sie nach, daß die erforderliche (verschärfte) Matrixbedingung verletzt ist.

(iii) Argumentieren Sie angesichts von (ii) für die „Kandidaten" x^* aus (i) geometrisch. Tragen Sie diese hierbei in einer Skizze ein, welche auch die gesamte zulässige Menge von $(\mathcal{P})$ enthält.

Welche Kandidaten sind lokale, welche sogar strikt lokale oder globale Minima, welche (im entsprechenden Sinne) Maxima ?

Wie lautet der minimale Wert von f ?

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Vorgelegt sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 - \cos(x_2) \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

(i) Untersuchen Sie f auf Konvexität.

(ii) Verwenden Sie zur approximativen Lösung des Problems der Minimerung von f die Methode des steilsten Abstiegs, indem Sie den Algorithmus in $(0, 0)$ starten und als Abbruchkriterium $\| \nabla f(x) \|_\infty < 1/100$ verwenden.

Deuten Sie die Situation, welche Sie beim Abbruch vorfinden.

(iii) Welches quadratische (Taylor-) Polynom beschreibt f in der Nähe von $(1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ besonders gut ?

Welches weitere Verfahren bezieht solche Informationen „zweiter Ordnung" mit ein ? (Hier genügt ein „berühmtes Beispiel".)