

10. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Multiplikatorenregel von Lagrange)

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 = c \end{array} \quad (1)$$

und lösen Sie es unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Kuhn-Tucker-Bedingungen)

Bestimmen Sie das Minimum von $f(x_1, x_2) := 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1^2 + x_2^2 = 5$ und $3x_1 + x_2 \leq 7$.

Tip: Die einzige (!) reelle Nullstelle von $t^3 + 7t^2 + 8t + 4$ ist kleiner als -4 , dies sollte in Ihrer Lösung allerdings noch bewiesen werden.

Aufgabe 3 (optimales Wertpapierportfolio)

Ein Investor ist auf der Suche nach einer optimalen Strategie, um in n verschiedene Wertpapiere zu investieren. Nach genauem Studium des Marktes rechnet er bei Wertpapier i mit einem erwarteten relativen Wert des Papiers in Höhe von μ_i am Ende des Monats. Die Standardabweichung betrage σ_i . Sei x_i die relative Investitionshöhe in Wertpapier i . Ein Modell zur Bestimmung des optimalen Portfolios lautet dann:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i - \beta \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{unter} & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \end{array} \quad (2)$$

wobei σ_{ij} die Kovarianz von Wertpapier i bzgl. j darstellt und $\beta \geq 0$ die Risikopräferenz des Entscheidungsträgers widerspiegelt.

Bestimmen Sie das optimale Portfolio im Fall von 3 Wertpapieren für einen Investor mit $\beta = 0.2$; die benötigten Parameter können Sie den folgenden Tabellen entnehmen:

	erwarteter Kurs:	σ_{ij}	x_1	x_2	x_3
x_1	1.2	x_1	0.5	0	0
x_2	1.3	x_2	0	1	1
x_3	1.4	x_3	0	1	2

Wie würde sich ein risikofreudigerer Investor mit $\beta = 0.05$ entscheiden ?

Aufgabe 4 (Lineare Programme)

Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform. Zeigen Sie mit den Kuhn-Tucker-Bedingungen: Ist das primale Problem zulässig und beschränkt, so ist auch das duale Programm zulässig. Welche Bedeutung haben hier die Multiplikatoren λ_i und μ_i in den Kuhn-Tucker-Bedingungen ?