MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 11-

12.1.2001

11. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Charakterisierung konvexer Funktionen)

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : S \mapsto \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(i) Gilt für alle $x, y \in S : f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$, so ist f konvex.
Tip: Wenden Sie obige Gradientenungleichung jeweils mit x und $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ bzw. y und z an.

(ii) Ist die Hesse-Matrix von f positiv-semidefinit, so ist f konvex.
Tip: Verwenden Sie den Satz von Taylor und (i).

Aufgabe 2 (Fibonacci-Suche)

(i) Beweisen Sie folgende Formel für die k-te Fibonacci-Zahl:

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Tip: Vollständige Induktion, verankern Sie in $k = 0$ und $k = 1$.

(ii) Berechnen Sie eine Näherung für das Minimum von $f(x) := x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ in $[0,1]$ mit der Fibonacci-Suche in $N = 2$ Schritten mit Maschinengenauigkeit $\epsilon := 0.1$ (diese wird im letzten Schritt benötigt, vgl. Skript).

Aufgabe 3 (Zyklisches Abstiegsverfahren)

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1 x_2 \tag{1}$$

(i) Lösen Sie das Problem näherungsweise mit dem zyklischen Abstiegsverfahren, indem Sie in $(0,0)$ starten und als Abbruchkriterium $\| x - x_{\text{alt}} \|_2 < 0.05$ verwenden. Dabei sollte das Minimum in Richtung der i-ten Koordinate exakt berechnet werden.

(ii) Vergleichen Sie das in (i) erhaltene Ergebnis mit der wahren Lösung.

Aufgabe 4 (Methode des steilsten Abstiegs)

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) := 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2. \tag{2}$$

Verwenden Sie zur approximativen Lösung des Problems die Methode des steilsten Abstiegs, indem Sie den Algorithmus in $(0,0)$ starten und als Abbruchkriterium $\| \nabla f(x) \|_\infty < 0.1$ verwenden.

Abgabe in den Übungsgruppen am 26.,29. bzw. 30.1.2001 !