MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 12-

2.2.2001

12. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Die folgenden Aufgaben sind freiwillig und werden weder korrigiert noch besprochen.

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren)

Betrachten Sie das folgende quadratische Minimierungsproblem in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x_1, x_2) := 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + x_2 + cx_1x_2.$$

Wir wollen untersuchen, wie sich das Newton-Verfahren auf obiges Problem anwenden lässt.

(i) Für welche c existiert ein striktes lokales Minimum von f im Inneren von $\mathbb{R}^2$?

(ii) Für welche c können Sie das Newton-Verfahren formal durchführen ?

(iii) Stellen Sie für die in (ii) errechneten c eine allgemeine Formel $x_{k+1} = g(x_k)$ zur Berechnung von x_{k+1} aus x_k auf. Was fällt Ihnen auf ?

(iv) Was passiert im Fall $c = 2$, wenn Sie anstatt der Invertierung der Hesse-Matrix das zugehörige Gleichungssystem $D^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$ lösen ?

Das hier beschriebene Verfahren ist das "eigentliche" Newton-Verfahren, da das Lösen von linearen Gleichungssysten numerisch weniger aufwendig ist als die Inversenberechnung.

Es folgen einige Aufgaben, die zur Wiederholung des Stoffes aus Mathematik 1 und 2 für Wirtschaftsinformatiker dienen sollen. Die Lösungen zu diesen Aufgaben findet man größtenteils im Lehrbuch von Walter, Analysis I, welches in der Bibliothek des Mathematischen Instituts zu finden ist. Die Seitenangaben beziehen sich dabei auf die zweite Auflage. Die Aufgaben erheben keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit im Hinblick auf die Vordiplomsklausur.

Aufgabe 2 (Taylorentwicklung)

Berechnen Sie die Taylorreihe von $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ um $x_0 = 0$, indem Sie

(i) eine allgemeine Formel für die Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$ herleiten bzw.

(ii) diese aus der Taylorreihe von e^x herleiten. (p.158)

Wie lautet der Konvergenzradius ?

Aufgabe 3 (Schwingungsgleichung)

Gegeben sei die Bewegungsgleichung der gedämpften Schwingung mit $\delta, \omega > 0$

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

Hier wird δ Abklingkonstante und $D := \delta/\omega$ das Dämpfungsmaß genannt. (pp.342-343)

(i) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung von (1), unterscheiden Sie dabei die Fälle $D < 1, D = 1$ und $D > 1$.

(ii) Skizzieren Sie die in (i) ermittelten verschiedenen Lösungen für $t > 0$.

(iii) Lösen Sie nun (1) mit zusätzlicher periodischer Anregung, genauer

$$\ddot{x}(t) + 10\ \dot{x}(t) + 16\ x(t) = 65\cos(t)$$

unter den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

Tip: Bei der Suche nach einer speziellen Lösung hilft ein Ansatz der Form $x(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$.

Aufgabe 4 (Integralrechnung)

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf deren Existenz und berechnen Sie ggf. den Wert.

(i) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx$ (p.276)

(ii) $\int_0^1 (e^{3x} + 3)/(e^x + 1)\ dx$ (p.278)

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1 + x^2)\ dx$ (p.324)

(iv) $\int_0^1 x^{-\alpha}\ dx$ für $\alpha > 0$ (p.324)

Aufgabe 5 (Folgen und Reihen)

(i) Untersuchen Sie die Reihe $\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ auf Konvergenz. (p.94)

(ii) Für welche x konvergiert die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ absolut ? (p.96)

(iii) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}(3n^3 - 4n^2 + 7)/(2n^3 + 5n)$. (p.63)

Termine:

- Scheinklausur Nr.2 : Montag, 12.2.2001, 17:30-19:30 in Hörsaal B
- Vordiplomsklausur Nr.1: Montag, 5.3.2001, 8:48-12:45
- Vordiplomsklausur Nr.2: Donnerstag 29.3.2001, 8:48-12:45

Zu den Vordiplomsklausuren ist eine Anmeldung in Ihrem Prüfungsamt erforderlich, der genaue Ort der Klausuren wird per Aushang sowie im Internet rechtzeitig bekanntgegeben. Als Hilfsmittel zugelassen sind wieder das Vorlesungsskript mitsamt den Übungsunterlagen, allerdings keine Taschenrechner.