MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 1-

27.10.2000

2. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Runden)

(i) Berechnen Sie die Kodierung der Zahl 0.875 in Dualdarstellung ($B = 2$), indem Sie wie im Beweis von Satz 1.3.1 der Vorlesung vorgehen.

(ii) Gegeben sei die Zahl $x := 9.875$ und Maschinengenauigkeit $t := 3$. Berechnen Sie die zugehörige (gerundete) Maschinenzahl $Rd_3(x)$ für $B = 8$ bzw. $B = 2$. Wie lauten die Zahlen im üblichen Dezimalsystem ($B = 10$) ?

(iii) Sei $a := 45.241$ und $b := 45.431$. Berechnen Sie in Gleitpunktarithmetik mit Mantissenlänge 5 den Term $a^2 - b^2$ gemäß

$$a \cdot a - b \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad (a+b)\ (a-b);$$

indem Sie nach jeder Rechenoperation runden.

Aufgabe 2 (Landau-Symbole)

(i) Sei A der Algorithmus, der die folgende Summe berechnet:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \tag{1}$$

Zeigen Sie $L_A(n) = O(n^2)$ für $n \to \infty$. Es gibt einen besseren Algorithmus A' mit $L_{A'}(n) = O(n)$ für $n \to \infty$. Wie lautet dieser ?

(ii) Sei $f(n) = \ln(n^k)\ p_m(n)$, wobei $p_m(n)$ ein Polynom vom Grad m sei. Finden Sie das minimale $l = l(k, m)$ mit $f(n) = o(n^l)$ für $n \to \infty$.

(iii) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$f(x) = O(x^n) \Rightarrow f(x) = o(x^{n+1}) \text{ für } x \to \infty. \tag{2}$$

Aufgabe 3 (Gauß-Algorithmus)

(i) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungsssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(ii) Der Chef einer Unternehmensberatung möchte herausfinden, wie die Zahl der Fehlstunden seiner Mitarbeiter von den geleisteten Überstunden abhängt. Eine Nachfrage in der Personalabteilung ergibt die folgenden Zusammenhänge:

- Mitarbeiter, die durchschnittlich 1 Überstunde am Tag leisteten, fehlten durchschnittlich 2 Stunden die Woche.

- Mitarbeiter, die durchschnittlich 2 Überstunden am Tag leisteten, fehlten durchschnittlich 4 Stunden die Woche.
- Mitarbeiter, die durchschnittlich 3 Überstunden am Tag leisteten, fehlten durchschnittlich 7 Stunden die Woche.

Der Chef vermutet nun, daß er sich die Zusammnehänge an besten an einem Polynom zweiten Grades verdeutlichen kann. Dazu beschreibe $x > 0$ die durchschnittlichen geleisteten Überstunden am Tag, $f(x) = ax^2 + bx + c$ die zugehörigen Fehlstunden pro Woche.

Bestimmen Sie die Fehlzeit–Funktion f durch Lösen eines linearen Gleichungssystems. Was ist also aus Arbeitgebersicht die optimale Zahl an täglichen Überstunden ? Würden Sie als Chef vorschlagen, die tägliche Arbeitszeit zu verkürzen ($x < 0$), um die Zahl der Fehlstunden zu senken ?

Aufgabe 4 (Vorsicht: Theorie)

Beweisen Sie Satz 1.4.1 der Vorlesung.

Tip: Unterscheiden Sie in a) und b) jeweils die Fälle $x_{-t-1} < B/2$ ($\Rightarrow x_{-t-1} \leq\ ?$) bzw. $x_{-t-1} \geq B/2$. In a) hilft vollständige Induktion, in b) Restgliedabschätzungen der geometrischen Reihe mit $q = 1/B$, c) und d) sind dann einfache Folgerungen aus b).