MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 3-

3.11.2000

3. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (LU–Zerlegung)

Betrachten Sie das folgende von $k \in \mathbb{R}$ abhängige Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & k & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(i) Für welche k laßt sich die LU–Zerlegung durchführen ?

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von (1) mit Hilfe der LU–Zerlegung für $k \notin \{2, 4\}$.

(iii) Was ändert sich im Fall $k = 4$?

Aufgabe 2 (positiv definite Matrizen)

Untersuchen Sie ob die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -5/3 & 2 & 10/3 \\ 2 & 2/3 & -4/3 \\ 10/3 & -4/3 & -2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, indem Sie

(i) die Eigenwerte von A berechnen bzw.

(ii) direkt mit Definition 2.5.1 arbeiten.

Aufgabe 3 (Eigenwerte)

Seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dabei sei A regulär; weiter sei λ eine Eigenwert von A und μ ein Eigenwert von B mit gemeinsamem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Matrix $A + B$ hat $\lambda + \mu$ als Eigenwert.

(ii) Die Matrix AB hat $\lambda\mu$ als Eigenwert.

(iii) Es gilt $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von A^{-1} .

Aufgabe 4 (Cholesky-Faktorisierung)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Cholesky-Faktorisierung. Hierbei seien A und b wie folgt gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$