

## 4. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

### Aufgabe 1 (Pivotstrategien)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die exakte Lösung lautet  $x = \frac{1}{9950} \begin{pmatrix} 5000 \\ 4950 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die Lösung in zweistelliger Gleitpunktarithmetik ( $t = 2$ ) und zwar durch das

- (i) Gaussverfahren ohne Pivotsuche,
- (ii) Gaussverfahren mit Spaltenpivotwahl. (Dabei wird im  $k$ -ten Eliminationsschritt das betragsmäßig maximale Element in Spalte  $k$  unterhalb der Diagonalen durch eine Zeilenpermutation auf die Diagonale gebracht. Für das neue Pivotelement  $\tilde{a}_{kk}^{(k)}$  gilt also  $|\tilde{a}_{kk}^{(k)}| = \max_{i \geq k} \{|a_{ik}^{(k)}|\}$ ).

und vergleichen sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.

### Aufgabe 2 (Fehlerabschätzung)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $A := \begin{pmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 39 \end{pmatrix}$  sowie  $b := \begin{pmatrix} 80 \\ 79 \end{pmatrix}$ . Wie groß darf man  $\|\Delta A\|_\infty$  wählen, damit für die Lösung  $\tilde{x}$  des gestörten Systems  $(A + \Delta A)x = b$  garantiert werden kann, daß

- (i)  $\tilde{x}$  existiert und eindeutig bestimmt ist,
- (ii)  $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-2}$  ausfällt ?

Tip: Satz 2.7.4 der Vorlesung

### Aufgabe 3 (Kondition einer Matrix)

Seien  $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reguläre Matrizen, dabei sei  $D = \text{diag}(d_i, i = 1 \dots n)$  eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen  $d_i$ . Weiter existiere ein  $C > 0$  derart, daß  $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = c$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Beweisen Sie die folgende Abschätzung:

$$\text{cond}_\infty(A) \leq \text{cond}_\infty(DA).$$

Tip: Für  $\|A\|_\infty$  und  $\|DA\|_\infty$  lassen sich einfache Formeln finden. Die jeweiligen Inversen behandle man so wie in Aufgabe 3 der Uni-Übung.

### Aufgabe 4 (Verallgemeinerung von Satz 2.7.4)

Beweisen Sie folgenden Satz unter den Voraussetzungen von Satz 2.7.4:

Seien  $x$  und  $x + \Delta x$  Lösungen der Systeme  $Ax = b$  und  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ . Dann läßt sich der relative Fehler abschätzen durch

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \|\Delta A\| / \|A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right). \quad (1)$$

Tip: Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von Satz 2.7.4