MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 4-

10.11.2000

4. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Pivotstrategien)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die exakte Lösung lautet $x = \frac{1}{9950} \begin{pmatrix} 5000 \\ 4950 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Lösung in zweistelliger Gleitpunktarithmetik ($t = 2$) und zwar durch das

(i) Gaussverfahren ohne Pivotsuche,

(ii) Gaussverfahren mit Spaltenpivotwahl. (Dabei wird im k-ten Eliminationsschritt das betraglich maximale Element in Spalte k unterhalb der Diagonalen durch eine Zeilenpermutation auf die Diagonale gebracht. Für das neue Pivotelement $\tilde{a}_{kk}^{(k)}$ gilt also $|\tilde{a}_{kk}^{k}| = \max_{i \geq k}\{|a_{ik}^{(k)}|\}$).

und vergleichen sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.

Aufgabe 2 (Fehlerabschätzung)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A := \begin{pmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 39 \end{pmatrix}$ sowie $b := \begin{pmatrix} 80 \\ 79 \end{pmatrix}$. Wie groß darf man $\| \triangle A \|_\infty$ wählen, damit für die Lösung $\tilde{x}$ des gestörten Systems $(A + \triangle A)x = b$ garantiert werden kann, daß

(i) $\tilde{x}$ existiert und eindeutig bestimmt ist,

(ii) $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10^{-2}$ ausfällt ?

Tip: Satz 2.7.4 der Vorlesung

Aufgabe 3 (Kondition einer Matrix)

Seien $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre Matrizen, dabei sei $D = \operatorname{diag}(d_i, i = 1 \ldots n)$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen d_i. Weiter existiere ein $C > 0$ derart, daß $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = c$ für alle $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie die folgende Abschätzung:

$$\operatorname{cond}_\infty(A) \leq \operatorname{cond}_\infty(DA).$$

Tip : Für $\| A \|_\infty$ und $\| DA \|_\infty$ lassen sich einfache Formeln finden. Die jeweiligen Inversen behandele man so wie in Aufgabe 3 der Uni-Übung.

Aufgabe 4 (Verallgemeinerung von Satz 2.7.4)

Beweisen Sie folgenden Satz unter den Voraussetzungen von Satz 2.7.4:
Seien x und $x + \triangle x$ Lösungen der Systeme $Ax = b$ und $(A + \triangle A)(x + \triangle x) = b + \triangle b$. Dann läßt sich der relative Fehler abschätzen durch

$$\frac{\| \triangle x \|}{\| x \|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \| \triangle A \| / \| A \|} \left(\frac{\| \triangle A \|}{\| A \|} + \frac{\| \triangle b \|}{\| b \|} \right). \tag{1}$$

Tip: Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von Satz 2.7.4