MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 7-
1.12.2000

7. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Tableauform vs. schematische Skizze des Simplex-Algorithmus)

Betrachten Sie für ein lineares Programm in Standardform das folgende Tableau zu einer zulässigen Basis B:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & c^T - c_B^T A_{\cdot B}^{-1} A & -c_B^T A_{\cdot B}^{-1} b \\ \hline 0 & A_{\cdot B}^{-1} A & A_{\cdot B}^{-1} b \end{array}.$$

Man kann dies als erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & c^T - c_B^T A_{\cdot B}^{-1} A \\ 0 & A_{\cdot B}^{-1} A \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -c_B^T A_{\cdot B}^{-1} b \\ A_{\cdot B}^{-1} b \end{pmatrix} \tag{1}$$

lesen. Weiter sei x die zur Basis B gehörige Basislösung. Zeigen Sie nun:

(i) $y = (-c^T x, x)^T$ ist Lösung von (1)

(ii) $-c_B^T A_{\cdot B}^{-1} b$ ist das Negative des Zielfunktionswerts in x

Setzt man voraus, daß z immer in der Basis verbleibt, so ändern die Gauß-Jordanschritte die erste Spalte der Matrix aus (1) nicht, und man kann sich auf das bekannte Schema zurückziehen.

Aufgabe 2 (Lösbarkeit des Simplexalgorithmus)

Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an s und t dafür, daß das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{unter} \quad & s x_1 + t x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(i) mindestens eine Optimallösung besitzt,

(ii) genau eine Optimallösung besitzt bzw.

(iii) unbeschränkt ist.

Wie lautet der optimale Wert der Zielfunktion ?

Beweisen Sie Ihre Aussagen in (i)–(iii) sowohl an der Gestalt des Simplextableaus als auch analytisch.

Aufgabe 3 (lineares Produktionsmodell)

Ein Betrieb stellt die Produkte $P_1, \dots, P_n$ her, dabei kann Produkt P_j zum Preis c_j verkauft werden. Zur Produktion benötigt man Grundstoffe aus m verschiedenen Ressourcen $R_1, \dots, R_m$, die jeweils in Quantitäten $b_1, \dots, b_m$ zur Verfügung stehen. Die Produktion einer Einheit vom Typ P_j verbrauche a_{ij} Einheiten des Grundstoffes R_i.

(i) Formulieren Sie das lineare Programm zur Maximierung des Erlöses.

(ii) Bestimmen Sie einen optimalen Produktionsplan im Fall

$$n = 3, \quad m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Redundanz in linearen Programmen)

Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen in Standardform

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Folgende 3 Fälle von Redundanz können in diesem System auftauchen:

- *Redundante Gleichungen:* Eine der Gleichungen kann als Linearkombination der anderen ausgedrückt werden.
- *Null-Variablen:* Eine Variable x_i ist in allen Lösungen des Systems gleich Null.
- *Nicht-extremale Variablen:* Für eine Variable x_i ist die Ungleichung $x_i \geq 0$ redundant, d.h. aus den Gleichungen ergibt sich bereits $x_i \geq a > 0$.

Die beiden letzten Redundanzfälle wollen wir nun genauer untersuchen:

(i) Gibt es Null-Variablen in dem folgenden System ?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii) Gibt es nicht-extremale Variablen in dem folgenden System ?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(iii) Vereinfachen Sie die Systeme aus (i) bzw. (ii) derart, daß die jeweiligen Fälle von Redundanz verschwinden.