

8. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Minimierungsproblem)

Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{ll} \min & 3y_1 + 2y_2 + y_3 \\ \text{unter} & y_1 + y_2 - y_3 \geq -2 \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -6 \\ & -y_1 + y_2 + y_3 \geq -4 \\ & y_3 \geq 0. \end{array} \quad (1)$$

Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert, indem Sie

- (i) das Problem auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus verwenden bzw.
- (ii) das zu (1) duale Problem untersuchen.

Tip: In Teil (i) können Sie eine zulässige Startbasis direkt erkennen, in Teil (ii) muß sie dagegen zunächst durch explizite Berechnung einer zulässigen Ecke gefunden werden.

Aufgabe 2 (Zyklischer Simplex)

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{3}{4} x_1 - 150 x_2 + \frac{1}{50} x_3 - 6 x_4 \\ \text{unter} & \frac{1}{4} x_1 - 60 x_2 - \frac{1}{25} x_3 + 9 x_4 + x_5 = 0 \\ & \frac{1}{2} x_1 - 90 x_2 - \frac{1}{50} x_3 + 3 x_4 + x_6 = 0 \\ & x_3 + x_7 = 1 \\ & x_1, \dots, x_7 \geq 0. \end{array} \quad (2)$$

Zeigen Sie an diesem Beispiel, daß das Simplex-Verfahren mit Steilster Anstieg-Regel zyckelt, wählen Sie bei der Zeilenwahl stets die Variable mit dem kleinsten Index. Was passiert geometrisch ?

Zeigen Sie weiter, daß der Algorithmus bei Verwendenden von Bland's rule nach endlich vielen Schritten stoppt.

Aufgabe 3 (Sensitivitätsanalyse)

Eine Ernährungsberatungsstelle kann drei Maßnahmen zur Beeinflussung des Ernährungsverhaltens einsetzen: Beratung, Vortrag, Kurs. Die drei Maßnahmen unterscheiden sich in der Beanspruchung der Mittel, die der Beratungsstelle zur Verfügung stehen, und in der Wirkung auf die Zielgruppen der Beratungsstelle. Die Daten über die Beanspruchung der Mittel und die Wirkung pro Einheit Maßnahme können der folgenden Tabelle entnommen werden:

Mittelbeanspruchung	Einheit	Beratung	Vortrag	Kurs
Arbeitsaufwand	h	1	8	10
Sachmittel	DM	10	200	50
Wirkung	Nutzenzahl	2	50	20

Die Wirkung einer Einheit Maßnahme wird folgendermaßen gemessen: Mit einer Maßnahme können im Durchschnitt bestimmte Personengruppen in bestimmtem Umfang erreicht werden. Diese Aspekte werden in Nutzenzahlen zusammengefasst, die pro Einheit Maßnahme in der Tabelle ausgewiesen sind.

- (i) Lösen Sie das Problem mit dem Simplex-Algorithmus unter der Annahme, daß der Beratungsstelle pro Monat 176 Stunden Arbeitskraft und 2000 DM Sachmittel zur Verfügung stehen.
- (ii) Angenommen die Sachmittel werden gekürzt aufgrund von Einsparungen in den öffentlichen Haushalten. Anstelle von 2000 DM pro Monat stehen nur noch 1200 DM zur Verfügung. Welchen Einfluß hat dies auf das optimale Programm der Beratungsstelle in (i) ?
- (iii) Die Aktivität der Maßnahme 1 (Beratung) ist nicht in der optimalen Lösung enthalten. Die Beratungskraft vermutet, daß der im Vergleich zur Wirkung hohe Arbeitsaufwand pro Beratung der Grund ist. Die Beratungskraft möchte nun wissen, ob die Beratung eine lohnende Alternative darstellt, wenn der Arbeitsaufwand pro Beratung halbiert wird. Was empfehlen Sie der Beratungskraft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Dualitätssatz)

Lösen Sie Übung 3.3.5 des Skripts, zeigen Sie also zunächst für ein lineares Programm in Standardform: Das duale Problem des dualen Problems ist das primale Problem. Folgern Sie nun: Ist das primale Problem beschränkt und zulässig, so gibt es für beide Programme Optimallösungen x^* und y^* und es gilt $c^T x^* = y^{*T} b$. Worin liegt der Unterschied zu Alternative a) aus Satz 3.3.3 ?