MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 9-

15.12.2000

9. Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1 (Differenzieren im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \left(x_1^2, e^{x_1^2+x_2^2}, \sin(x_2)\right)^T \quad \text{bzw.} \quad g(x_1, x_2) := \left(x_1 x_2, 5, \frac{1}{x_2^2+1}\right)^T. \tag{1}$$

Berechnen Sie $D(f^T g)(0,0)$.

Aufgabe 2 (Minimierungsproblem im $\mathbb{R}^3$)

Berechnen Sie die lokalen Minima der Funktion

$$f(x, y, z) := 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9. \tag{2}$$

Existiert ein globales Minimum ?

Tip: Die Eigenwerte der Hessematrix kann man nicht raten. Bei der Frage nach dem globalen Minimum hilft eine Formel über Minima von quadratischen Polynomen.

Aufgabe 3 (Satz über implizit definierte Funktionen)

(i) Sei $h(x, \lambda) := x f(x, \lambda)$ mit $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter gelte $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0$. Zeigen Sie die lokale Existenz einer Funktion $g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$h(x, \lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = g(x)$$

Tip: Dividieren Sie x heraus und wenden den Satz über implizit definierte Funktionen an.

(ii) Sei jetzt $h(x, \lambda) = (x - \lambda)x + x^4 + \lambda^5 x^{24}$. Beschreiben Sie die Lösungsmenge von $h(x, \lambda) = 0$ lokal um $(0,0)$ und zeichnen diese in ein Koordinatensystem ein. Wieso wird $\lambda = 0$ Verzweigungspunkt genannt ?

Aufgabe 4 (Tangentialräume)

Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$.

(i) Wie sieht die Mannigfaltigkeit $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid h(x) = 0 \}$ aus ?

(ii) Berechnen Sie die Tangentialräume $L(p_i^*)$ mit $p_1^* = (1,0,0)^T$ bzw. $p_2^* = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$.

(iii) Zur Veranschaulichung skizziere man S, sowie die Ebenen $p_i^* + L(p_i^*)$.

Wem Zeichnen im $\mathbb{R}^3$ nicht so liegt, der skizziere die Mengen in der $(x_1, x_2)-$Ebene und erläutere die Situation im $\mathbb{R}^3$.