MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 3-

3.11.2000

3. Uni–Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1

Berechnen Sie die LU–Zerlegung der Matrix: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Tip: Laut Vorlesung wird der Gauß-Eliminationsschritt bzgl. des Elements a_{dd} durch Linksmultiplikation einer Frobenius-Matrix mit $g_{id} = a_{id}/a_{dd}$ bewirkt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, daß v_1 Eigenvektor von A ist, wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1 ?

(ii) Es gibt einen weiteren Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Wie lautet der zugehörige Eigenvektor v_2 ?

(iii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ von A. Warum sind die Nullstellen gerade die Eigenwerte von A ?

(iv) Seien $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ normierte Eigenvektoren (d.h. $\| \tilde{v}_i \| = 1$) bezüglich der Euklidischen Vektornorm. Sei Q die Matrix, die $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ als Spalten hat. Berechnen Sie QAQ^T. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation sollte das Resultat eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen sein.

Aufgabe 3

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Cholesky-Faktorisierung. Hierbei seien A und b wie folgt gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tip: Gesucht ist also zuerst die untere Dreiecksmatrix $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$ mit $A = LL^T$. Die Einträge l_{ij} lassen sich aus der Gleichung rekursiv berechnen, die gesuchte Lösung finden Sie dann als Lösung von $Ly = b$, wobei y Lösung von $L^T x = y$ ist analog zur LU–Zerlegung.