MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 4-

10.11.2000

4. Uni–Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1

Sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie ihre Kondition für

(i) die Spaltensummennorm $\| \cdot \|_1$,

(ii) die Zeilensummennorm $\| \cdot \|_\infty$,

(iii) die Spektralnorm $\| \cdot \|_2$.

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dabei seien die Matrix $A := \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$, sowie der Vektor $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(i) Berechnen Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler $\| \triangle x \|_\infty \,/\, \| x \|_\infty$, wenn b um $\triangle b$ gestört wurde.

(ii) Vergleichen Sie im Fall $\triangle b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/10 \end{pmatrix}$ den wahren Fehler mit der in (i) erhaltenen Schranke.

Aufgabe 3

Seien $A, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre Matrizen, dabei sei $D = \text{diag}(d_i, i = 1 \ldots n)$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen d_i. Beweisen Sie die folgende Abschätzung:

$$\text{cond}_\infty(A) \le \frac{\max_{i=1}^n(|d_i|)}{\min_{i=1}^n(|d_i|)} \, \text{cond}_\infty(DA).$$

Tip : Um $\| A \|_\infty$ nach oben abzuschätzen, schreiben Sie A als $D^{-1}DA$ und verwenden, daß die Norm submultiplikativ ist. Wenn Sie nun die Gestalt von D^{-1} berücksichtigen und ähnlich vorgehen, um $\| A^{-1} \|_\infty$ abzuschätzen, ist die Lösung sehr nah.

Zusatzfrage: Gilt obige Aussage auch für die Spektralnorm bzw. die Spaltensummennorm ?