MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber
Dipl.Math. Michael Kurth

WS 2000/2001
- Blatt 6-

24.11.2000

6. Uni–Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

In der gesamten Uni–Übung wollen wir uns mit dem folgenden linearen Programm in Standardform befassen:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{unter} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

Daher sollten die Aufgaben auch ausnahmsweise nur in der angegebenen Reihenfolge bearbeitet werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ecken des zulässigen Bereichs von (1) gemäß Lemma 3.4.2 der Vorlesung.

Tip: Ist $x \geq 0$ eine Ecke, so läßt sich diese gemäß $x_B = A_{\cdot B}^{-1} b$ und $x_N = 0$ berechnen. Die Mengen $B \subset \{1, \ldots, n = 4\}$ sind zweielementig, die Matrizen $A_{\cdot B}$ also reguläre 2×2–Matrizen. Die Mengen N sind in diesem Fall definiert als $\{1, \ldots, 4\} \setminus B$ und geben die Nulleinträge in den einzelnen Ecken x an. Sie dürfen ohne Beweis die folgende Formel zur Invertierung von 2×2-Matrizen benutzen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Finden Sie mit Hilfe des Optimalitätskriteriums aus Proposition 3.4.3 der Vorlesung unter den in Aufgabe 1 gefundenen Ecken, diejenige, die die Zielfunktion maximiert. Bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen der Koordinaten der einzelnen Ecken in die Zielfunktion.

Aufgabe 3

Dualisieren Sie das Problem (1). Wie lautet der optimale Wert der Zielfunktion ?

Tip: Dualitätssatz.

Wenn jetzt noch Zeit ist, bringe man das duale Programm wieder auf Standardform.