

9. Uni–Übung zur Vorlesung Algorithmische Mathematik

Aufgabe 1

Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2 \quad \text{bzw.} \quad g(t) := (t^2, \cos(t))^T. \quad (1)$$

Berechnen Sie $(f \circ g)'(t)$ und $D(g \circ f)(x_1, x_2)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2 \\ \text{unter} & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (2)$$

Existieren Lösungen im Inneren des zulässigen Bereichs ?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $h(x, y) := x^2 - y$, in dieser Aufgabe soll die Nullstellenmenge von h untersucht werden.

- (i) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, derart daß aus $h(x, y) = 0$ folgt: $y = f(x)$. Man sagt in diesem Fall: $h(x, y) = 0$ lässt sich nach y auflösen.
- (ii) Wie man leicht erkennt, ist $h(0, 0) = 0$. Beweisen Sie die lokale Existenz um $(0, 0)$ eines f wie in (i) mittels des Satzes über implizit definierte Funktionen und vergleichen Sie $f'(0)$ mit dem Wert aus (i).

Tip: Mit der Notation aus dem Satz ist hier $(x^*, y^*) = (0, 0)$, zum Beweis der Existenz ist nur zu zeigen: $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) \neq 0$

- (iii) Zeigen Sie, daß sich die Gleichung $0 = h(x, y) + y^3 + x^4 + 7yx^2$ lokal um $(0, 0)$ nach y auflösen lässt.