MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber

WS 2000/2001

5.3.2001

Fachprüfung Mathematik

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Wir beschäftigen uns mit der Taylor-Reihe der Funktion $f(x) := x\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(i) Welches Polynom vierten Grades beschreibt f in der Nähe von x_0 besonders gut ?

(ii) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f um x_0.

(iii) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der in (ii) ermittelten Taylor-Reihe.

(iv) Begründen Sie, wieso die Taylor-Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich $f(x)$ ist.

Tip: Betrachten Sie das Verhalten des Restgliedes $R_n(x)$ aus dem Satz von Taylor für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Untersuchen Sie die beiden folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren jeweiligen Wert:

(i) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

(ii) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx$

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Es sei die folgende periodisch angeregte Schwingungsgleichung vorgelegt:

$$(\mathcal{L}) \qquad \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) - 12x(t) = \sin(t) - 43\cos(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir wollen $(\mathcal{L})$ unter den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 4, \qquad \dot{x}(0) = 1$$

lösen.

(i) Bestimmen Sie zunächst die Lösungsmenge der zu $(\mathcal{L})$ gehörenden homogenen Differentialgleichung

$$(\mathcal{L}_{hom}) \qquad \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) - 12x(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(ii) Ermitteln Sie eine spezielle Lösung x_s von $(\mathcal{L})$, indem Sie den Ansatz

$$x_s(t) = a\sin(t) + b\cos(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

verwenden.

(iii) Bestimmen Sie nun mittels (i) und (ii) diejenige Lösung x von $(\mathcal{L})$, welche zusätzlich den Anfangsbedingungen genügt.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei das folgende von $c \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem:

$$(\mathcal{L}_c) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche c läßt sich die LU-Zerlegung durchführen ?

(ii) Bestimmen Sie für die in (i) ermittelten c die Lösungsmenge von $(\mathcal{L}_c)$ mit Hilfe der LU-Zerlegung.

(iii) Worin besteht in Definition und Wirkungsweise der Unterschied zwischen den η-Matrizen gegenüber den Frobenius-Matrizen ?

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende lineare Optimierungsproblem (im $\mathbb{R}^3$):

$$(\mathcal{LP}) \qquad \begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_3 \\ \text{unter} & y_3 \geq -1 \\ & y_1 - y_3 \geq 0 \\ & -3y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq -6 \\ & -y_2 + 2y_3 \geq -2. \end{array}$$

Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert, indem Sie

(i) $(\mathcal{LP})$ auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus unter Benutzung der „Steilster-Anstieg“- Pivotregel verwenden bzw.

(ii) das zu $(\mathcal{LP})$ duale Problem untersuchen.

Geben Sie zu beiden Problemem jeweils auch eine optimale Lösung an.

Aufgabe 6 (24 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{rll} \min & f(x) := x_1^2 + x_1x_2 + \tan(x_3^2) & \left(x \in \mathbb{R}^2 \times \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right) \\ \text{unter} & h(x) := x_1 + 2x_2 - 6 = 0 & \\ & g(x) := \frac{\pi}{4} - x_3^2 \geq 0. & \end{array}$$

Wir sind an lokalen und globalen Minima des Problems $(\mathcal{P})$ interessiert.

(i) Werten Sie eine für $(\mathcal{P})$ geeignete *notwendige Optimalitätsbedingung erster Differentiationsordnung* (mit Gradienten von f, h bzw. g) aus.

(ii) Untersuchen Sie mit Hilfe einer *hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Differentiationsordnung*, ob der „Kandidat“ x^* aus (i) ein strikt lokales Minimum für $(\mathcal{P})$ ist.

(iii) Überlegen Sie sich, ob der „Kandidat“ x^* aus (i) sogar ein globales Minimum für $(\mathcal{P})$ ist.

Aufgabe 7 (16 Punkte)

Gegeben sei das folgende unbeschränkte Optimierungsproblem in Abhängigkeit von $d \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{P}_d) \quad \min \quad f_d(x) := d\cosh(x_1) - d^2 x_1 + x_2^2 \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Wir wollen untersuchen, ob bzw. wie sich das Newton-Verfahren auf $(\mathcal{P}_d)$ anwenden läßt.

(i) Für welche d existiert ein strikt lokales Minimum von f ?

(ii) Für welche d können wir das Newton-Verfahren formal durchführen ?

(iii) Stellen Sie für die in (ii) errechneten d eine allgemeine Newtonsche Formel $x^{k+1} = g(x^k)$ zur Berechnung von x^{k+1} aus x^k auf ($k \in \mathbb{N}$) und führen Sie für den Startpunkt $x^1 = (0,1)^T$ einen Newton-Schritt durch.